

Representação acústica de material absorvedor no domínio do tempo utilizando filtros de resposta ao impulso finito na modelagem discreta de Huygens

de Carvalho, R.S.T.*; Cordioli, J.A.†

*Laboratório de Vibrações e Acústica, UFSC, Florianópolis, SC, renato@lva.ufsc.br

†Laboratório de Vibrações e Acústica, UFSC, Florianópolis, SC, renato@lva.ufsc.br

Resumo

Nos últimos anos renovou-se o interesse em métodos numéricos no domínio do tempo em vista de aplicações como síntese sonora e da necessidade de se obter a resposta impulsiva de sistemas acústicos. A Modelagem Discreta de Huygens (DHM) é um dos métodos disponíveis e que oferece determinadas características interessantes, tais como implementação computacional relativamente simples e baixo custo computacional. Apesar de o método ter sido largamente utilizado no campo do eletromagnetismo, sua aplicação em acústica ainda se encontra numa condição limitada, especialmente em relação à descrição adequada de materiais de absorção nas fronteiras do domínio analisado. O principal objetivo deste artigo é mostrar a aplicabilidade dos filtros FIR - *Finite Impulse Response* na representação de materiais absorvedores no método DHM, sem degradar significativamente o seu desempenho computacional. Neste trabalho, o DHM foi utilizado para obter indiretamente as funções de resposta em frequência de uma cavidade acústica, com e sem a presença de materiais de absorção. Os resultados numéricos e os tempos computacionais foram comparados com modelos elaborados em Elementos Finitos (FE). Observou-se excelente concordância entre os métodos, com grande vantagem para o método DHM em termos do custo computacional.

Palavras-chave: Modelagem Discreta de Huygens, *Finite Impulse Response*, Elementos Finitos.

1. Introdução

Em 1690, Huygens em seu Tratado da Luz [1] propôs uma teoria na qual considera a luz como uma onda, o que permite que a posição de uma frente de onda em um tempo futuro possa ser prevista baseada em sua posição atual. Huygens estabeleceu que cada ponto de uma frente de onda pode ser considerada como o centro de uma perturbação secundária capaz de gerar novas pequenas ondulações. A frente de onda em qualquer instante futuro pode ser considerada como a superposição destas pequenas ondulações mencionadas. Este conceito físico de propagação pode ser implementado computacionalmente, considerando o tempo e o espaço no domínio discreto. A primeira forma discretizada do modelo físico de Huygens foi concebida com o objetivo de simular a propagação de ondas para casos bidimensionais em campos eletromagnéticos [2]. A fim de proporcionar a base teórica, o método foi originalmente proposto utilizando conceitos específicos

da teoria da linha de transmissão. Entretanto, o método tem sido utilizado em outras áreas de engenharia, levando ao desenvolvimento de novas abordagens teóricas. Uma abordagem relativamente nova, denominada de modelagem discreta de Huygens [3], foi concebida com o foco em aplicações na área de acústica. Este nome refere-se diretamente a uma forma discretizada do Princípio de Huygens. Tal como afirmado por [3], o método aplicado é análogo à versão original publicada por Johns e Beurle [2], conhecida como Método das Matrizes de Linha de Transmissão (TLM). Entretanto, diferentemente dos métodos tradicionais, tais como diferenças finitas e elementos finitos, em que um procedimento de discretização é aplicado ao modelo matemático da equação da onda [4], o DHM pode ser considerado como uma abordagem mais diretamente ligada a física do problema, uma vez que não envolve a representação do problema por uma equação diferencial [5]. A ideia principal consiste em obter diretamente equações algébricas

em um domínio discretizado, com base nas leis de conservação e continuidade da física [4-9], tais como conservação da massa; conservação da quantidade de movimento e continuidade de campo de pressão e velocidade. No DHM, o domínio analisado é dividido em subdomínios, a fim de aplicar individualmente as leis mencionadas. Na abordagem acústica, as unidades básicas ou nós da malha são formados a partir de cruzamentos de tubos virtuais. Deste procedimento, obtém-se o chamado nó DHM com um determinado número de ramos e uma região de descontinuidade de impedância acústica localizada, gerada pelo cruzamento dos ramos, definindo o volume de controle. A malha DHM é obtida ligando os ramos do nó analisado com os ramos dos nós adjacentes. Estes ramos exercem a função de uma guia de onda e a propagação ocorre quando um sinal incidente desloca-se para o centro do nó através de um dos ramos e, seguindo os princípios de conservação, espalha-se pelos ramos deste nó. O pulso desloca-se para os nós adjacentes e, no instante de tempo seguinte, soma-se ao pulso proveniente de outras regiões da malha. Deve-se ressaltar que o método DHM demonstra excelente desempenho computacional, especialmente quando comparado aos métodos numéricos tradicionais, como FEM e BEM [10]. Outro aspecto diz respeito as fronteiras acústicas que, geralmente, possuem comportamento acústico dependente da frequência. Isto significa que a onda refletida difere em termos de fase e amplitude em relação à onda incidente para cada frequência analisada [11]. Este fato é especialmente importante e um aspecto particular da teoria DHM que ainda não está adequadamente desenvolvido. A abordagem mais simples seria a de transformar os valores conhecidos de impedância do domínio da frequência para o domínio do tempo, utilizando todos os coeficientes da resposta impulsiva do sistema analisado [12]. No entanto, esta abordagem resulta em um custo computacional proibitivo [10]. Em função desta dificuldade, muitos autores optam por utilizar um valor único para o fator de reflexão na representação da condição de contorno em simulações DHM [3], o que limita a aplicação para materiais não dispersivos ou independentes da frequência.

Diferentes tentativas para modelar os materiais dispersivos no domínio do tempo podem ser encontradas na literatura [12-15]. Em [12], um ajuste polinomial foi utilizado para modelar a impedância no domínio de frequência, enquanto que em [13], foi adotada uma aproximação da impedância como a soma de sistemas lineares. Em [14], coeficientes FIR foram utilizados para modelar a absorção atmosférica. A abordagem adotada em [15] conduziu a um método para a condição fronteira aplicado em diferenças finitas, na qual dois tipos possíveis de fronteira são considerados, isto é, comportamento tipo mola e tipo massa. Em resumo, o fator de reflexão de um material pode assumir um único valor, o que permite a análise de uma única frequência, ou de materiais não dispersivos, ou mesmo um conjunto de coeficientes relacionados com a resposta ao impulso do material. O último caso permite uma análise multifrequencial em uma única rodada de simulação. Assim, um tipo de resposta ao impulso truncada deve ser obtida, de modo a determinar a forma como o material de absorção se comporta no domínio do tempo. Este objetivo foi atingido neste trabalho de uma forma computacionalmente eficiente utilizando coeficientes de um filtro digital FIR. Além disso, realiza-se também a derivação passo a passo da matriz de espalhamento para um meio homogêneo, não dissipativo e anisotrópico, uma vez que mesmo em publicações de referência como em [3] e [5], determinados aspectos específicos não são detalhados, tais como os pressupostos físicos aplicados e a derivação da fórmula para o cálculo da velocidade de partícula.

2. Conceitos Fundamentais

Conforme proposto por Huygens [1], a propagação da frente de onda pode ser representada pela superposição de infinitas fontes pontuais, cada uma radiando pequenas frentes de onda esféricas, tal como ilustrado na Fig. 1. A luz proveniente do ponto A se expande em uma frente de onda inicial, na qual cada ponto desta frente se comporta como uma nova fonte de onda luminosa. As fontes secundárias (b, b, b), partindo da frente de onda no instante t_1 , formam um conjunto de pequenas ondulações que formarão uma nova

frente de onda no instante t_2 . Novamente fontes terciárias (c, c, c, \dots) darão origem a pequenas ondulações que formarão uma nova frente de onda e, assim, sucessivamente. Através deste modelo físico de propagação é possível prever uma posição futura da frente de onda a partir de sua posição atual.

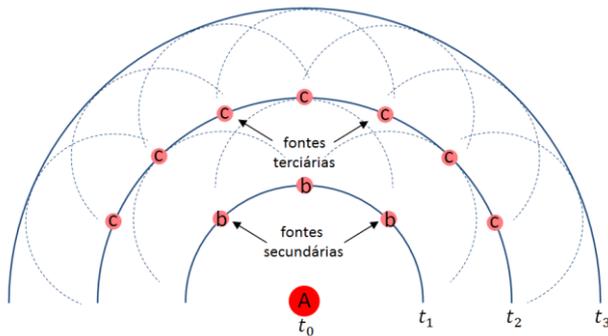


Fig. 1 - Representação do modelo físico de Huygens

Encontra-se na literatura alguns trabalhos com tratamentos matemáticos para o princípio de Huygens, buscando analogias com a solução de Green para a equação da onda. Entretanto, por não ser de fundamental importância para a compreensão e aplicação numérica do princípio, este aspecto não será explorado ao longo deste artigo. Recomendam-se aos interessados os seguintes trabalhos de referência: [16-20]. A ideia básica da modelagem discreta de Huygens consiste em quebrar o domínio contínuo mostrado na Fig. 1 em subdomínios, a fim de aplicar o Princípio de Huygens e as leis de conservação individualmente. A Fig. 2 ilustra uma sequência de propagação do sinal em uma malha bidimensional resultante da divisão do domínio contínuo em elementos discretos (nós). Como consequência, uma rede ou matriz de nós é formada, separados pelas distâncias Δx e Δy nas direções x e y , respectivamente, descrevendo assim o espaço discretizado e possibilitando o cálculo das variáveis associadas ao campo em cada nó da malha em intervalos de tempo discretos $t_d = k\Delta t$. Os valores destas variáveis em pontos intermediários aos nós podem ser obtidos através de diferentes técnicas matemáticas de interpolação. Diante das informações já apresentadas, pode-se resumir o

mecanismo de propagação do sinal na malha DHM em três passos principais, a citar: excitação ou incidência de um pulso em um nó arbitrário; espalhamento desta energia incidente e; conexão com os ramos dos nós adjacentes. A cada passo $k\Delta t$, os pulsos viajam do centro de um nó até os centros dos nós imediatamente adjacentes, através dos ramos que os conectam. Quando um pulso atinge um determinado nó, é chamado de pulso incidente, sendo que uma parcela da sua energia é distribuída para os outros ramos deste nó, enquanto a parcela restante é refletida para o nó que deu origem ao pulso incidente. Os sinais espalhados tornam-se sinais incidentes em nós adjacentes no próximo tempo discreto $(k + 1)\Delta t$. Este processo se repete até que o tempo total de simulação seja atingido.

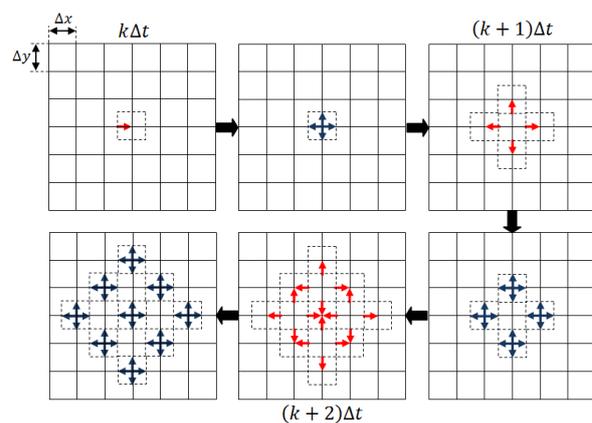


Fig. 2 - Exemplo de uma sequência de propagação bidimensional.

O ponto-chave do método consiste no cálculo dos sinais espalhados através da matriz de espalhamento. Em eletromagnetismo, a matriz de espalhamento é geralmente derivada utilizando leis e conceitos da teoria de linha de transmissão, que contém implicitamente a conservação de carga e energia. Uma analogia direta pode ser aplicada em acústica, entretanto, no presente estudo, uma abordagem com enfoque direto nas leis de conservação é aplicada. É válido lembrar que o mesmo procedimento pode ser extrapolado para casos tridimensionais ou topologias que considerem as perdas, heterogeneidade e comportamento anisotrópico do meio analisado. Na seguinte de-

casos tridimensionais ou topologias que considerem as perdas, heterogeneidade e comportamento anisotrópico do meio analisado. Na seguinte derivação, uma onda acústica é considerada propagando-se através de guias de onda e junções, considerando as seguintes premissas físicas: o fluido é homogêneo, não viscoso, isotrópico e sem condutividade térmica; o fluxo é uniforme quando ondas planas acústicas cruzam a fronteira do volume de controle; não há fonte de massa ou energia dentro do volume de controle e a força gravitacional é negligenciada. Com o objetivo de facilitar a exposição matemática deste conceito, será considerado um nó sem perdas bidimensional, com a dimensão z colapsada. Este nó é formado por quatro ramificações ortogonais denominadas de ramos ou portas, com impedâncias acústicas $Z_1; Z_2; Z_3; Z_4$ e áreas da seção transversal $S_1; S_2; S_3; S_4$ respectivamente. Na região compartilhada ou junção entre os ramos, é definido um volume de controle V , finito, fixo e indeformável, tal qual ilustrado pela Fig. 3. Considera-se que para cada um dos r ramos, sendo $r = 1 : 4$, há uma onda ou sinal acústico incidente p_r^i . Para cada onda incidente nos ramos do nó, geram-se ondas espalhadas, uma refletida no ramo de incidência e as outras transmitidas para os demais ramos do nó. A soma de todas as pressões espalhadas em cada ramo r , resulta nas pressões espalhadas totais, denominadas p_r^s .

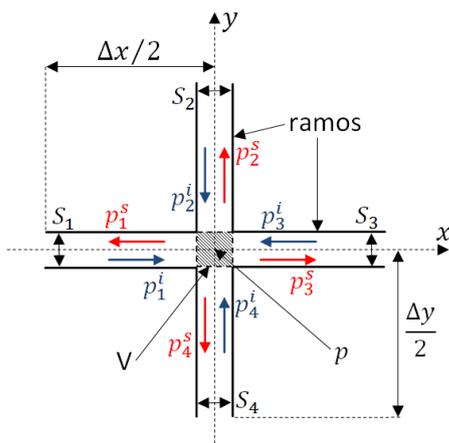


Fig. 3 - Ondas incidentes e espalhadas em um nó 2D sem perdas.

Primeiramente, consideram-se ondas planas conhecidas e harmônicas incidentes $p_r^i(x, t_d)$ em um nó arbitrário:

$$\begin{aligned} p_1^i(x, t_d) &= P_1^i \exp[j(\kappa x - \omega t_d)], \\ p_2^i(x, t_d) &= P_2^i \exp[j(-\kappa y - \omega t_d)], \\ p_3^i(y, t_d) &= P_3^i \exp[j(-\kappa x - \omega t_d)], \\ p_4^i(y, t_d) &= P_4^i \exp[j(\kappa y - \omega t_d)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Ao encontrar uma mudança de impedância acústica na junção dos ramos, as ondas incidentes em cada ramo r resultam em quatro ondas de pressão espalhadas $p_{r1}^s, p_{r2}^s, p_{r3}^s, p_{r4}^s$. Uma delas é refletida pelo mesmo ramo da onda incidente e as demais transmitidas para os outros ramos. A soma de todas as ondas espalhadas em cada ramo devido à onda incidente p_r^i resulta nos sinais espalhados p_r^s , dados por:

$$\begin{aligned} p_1^s(x, t_d) &= P_1^s \exp[j(-\kappa x - \omega t_d + \phi)], \\ p_2^s(x, t_d) &= P_2^s \exp[j(\kappa y - \omega t_d + \phi)], \\ p_3^s(y, t_d) &= P_3^s \exp[j(\kappa x - \omega t_d + \phi)], \\ p_4^s(y, t_d) &= P_4^s \exp[j(-\kappa y - \omega t_d + \phi)], \end{aligned} \quad (2)$$

nas quais P_r^i e P_r^s são, respectivamente, as amplitudes das ondas incidentes e espalhadas em um dado ramo r , $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, $\kappa = \omega/c$ é o número de onda, $t_d = k\Delta t$ é o tempo discreto, ω é a frequência angular, c é a velocidade da onda; ϕ é o ângulo de fase e x e y são as coordenadas Cartesianas. A matriz de espalhamento pode ser obtida pela aplicação das seguintes leis fundamentais da física no volume de controle [4, 5, 13] em um dado instante discreto $k\Delta t$:

Conservação da massa: o fluxo de massa líquida através da superfície de controle definida no centro de nó ($x = 0, y = 0$) deve ser igual a zero, o que leva a

$$\rho [(U_1^i + U_1^s) + (U_2^i + U_2^s) + (U_3^i + U_3^s) + (U_4^i + U_4^s)] = 0, \quad (3)$$

na qual ρ é a densidade e U_r^i e U_r^s são as velocidades de volume das ondas incidente e espalhadas em cada ramo. Uma vez que a impedância acústica pode ser definida como $z = p/U = p/uS = Z/S$, reescreve-se a Eq. (3) em termos das ondas de pressão sonora e impedâncias acústicas específicas, tal que:

$$\rho \left[S_1 \left(\frac{p_1^i}{Z_1} - \frac{p_1^s}{Z_1} \right) + S_2 \left(\frac{p_2^i}{Z_2} - \frac{p_2^s}{Z_2} \right) + S_3 \left(\frac{p_3^i}{Z_3} - \frac{p_3^s}{Z_3} \right) + S_4 \left(\frac{p_4^i}{Z_4} - \frac{p_4^s}{Z_4} \right) \right] = 0. \quad (4)$$

Considerando que o nó sem perdas bidimensional tem características geométricas idênticas, o que implica em $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_g$, sendo g o índice que representa a guia de onda. Assim, a equação de conservação da massa simplifica-se para:

$$\frac{p_1^i - p_1^s}{Z_1} + \frac{p_2^i - p_2^s}{Z_2} + \frac{p_3^i - p_3^s}{Z_3} + \frac{p_4^i - p_4^s}{Z_4} = 0. \quad (5)$$

Continuidade do campo de pressão sonora: A pressão sonora p_n deve ser igual em todos os ramos na posição cartesiana $x = 0, y = 0$, tal que:

$$\begin{aligned} p_n &= p_1^i + p_1^s, \\ p_n &= p_2^i + p_2^s, \\ p_n &= p_3^i + p_3^s, \\ p_n &= p_4^i + p_4^s. \end{aligned} \quad (6)$$

Essas expressões são reorganizadas em termos de cada uma das ondas espalhadas desconhecidas. Iniciando pela onda espalhada p_1^s , obtém-se:

$$\begin{aligned} p_2^s &= p_1^i + p_1^s - p_2^i, \\ p_3^s &= p_1^i + p_1^s - p_3^i, \\ p_4^s &= p_1^i + p_1^s - p_4^i. \end{aligned} \quad (7)$$

Substituindo as Eqs. (1, 2, 7) na Eq. (5) e considerando a posição Cartesiana ($x = 0; y = 0$) e $\phi = 0$, a seguinte expressão em termos de amplitudes de pressão e admitância ($Y = 1/Z$) é obtida:

$$P_1^s = \frac{(Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4)P_1^i + 2Y_2P_2^i + 2Y_3P_3^i + 2Y_4P_4^i}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \quad (8)$$

Considerando a condição de espalhamento isotrópico, na qual a admitância é idêntica em todos os ramos ($Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_g$), obtém-se a primeira equação para um nó sem perdas bidimensional:

$$4P_1^s = -2P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i. \quad (9)$$

Esta expressão refere-se a onda espalhada em um dado ramo causada pelas ondas incidentes nos demais ramos. Aplicando-se o mesmo procedimento aos demais sinais espalhados (p_2^s, p_3^s, p_4^s), obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} 4P_1^s &= -2P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i, \\ 4P_2^s &= +2P_1^i - 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i, \\ 4P_3^s &= +2P_1^i + 2P_2^i - 2P_3^i + 2P_4^i, \\ 4P_4^s &= +2P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i - 2P_4^i. \end{aligned} \quad (10)$$

Este conjunto de equações é válido para todos os nós da malha. Portanto, o sistema de equações pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^s \\ P_2^s \\ P_3^s \\ P_4^s \end{matrix} \right\} \\ k \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^i \\ P_2^i \\ P_3^i \\ P_4^i \end{matrix} \right\} \\ k \end{matrix}, \quad (11)$$

ou

$$\begin{matrix} n \\ \mathbf{p}^s \end{matrix} = \mathbf{S} \begin{matrix} n \\ \mathbf{p}^i \end{matrix}, \quad (12)$$

termina se há perdas, mudanças de meio e consequentemente a velocidade de propagação, ou mesmo se o material apresenta comportamento não isotrópico. É válido lembrar que as mesmas expressões podem ser obtidas ao se realizarem os balanços de quantidade de movimento e energia carreada pela massa através do volume de controle, uma vez que todas as propriedades associadas a um fluido estão sujeitas aos princípios de conservação. Como consequência do princípio de continuidade de campo, a amplitude resultante de pressão ${}^n P$ no centro do nó é obtida pela soma da amplitude das ondas incidente e espalhadas em cada ramo. Desta forma, substituindo a Eq. (8) na Eq. (6), obtém-se

$${}^n P = \frac{(2{}^n P_1^i Y_1 + 2{}^n P_2^i Y_2 + 2{}^n P_3^i Y_3 + 2{}^n P_4^i Y_4)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \quad (13)$$

A Eq. (13) pode ser simplificada e a pressão sonora no centro do nó fica

$${}^n P = \frac{{}^n P_1^i + {}^n P_2^i + {}^n P_3^i + {}^n P_4^i}{2} \quad (14)$$

Inspirado pela conservação do fluxo magnético [6] aplicada em eletromagnetismo, as componentes da velocidade de partícula em um dado nó n , em um determinado tempo discreto $k\Delta t$, são obtidas pela aplicação do princípio da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y , resultando nas seguintes expressões:

$${}^n V_x \left(\sum_{i=1,3} \rho_i S_i \right) = \sum_{i=1,3} {}^n V_i \rho_i S_i = \frac{{}^n P_1^i - {}^n P_1^s}{Z_1} \rho_1 S_1 + \frac{{}^n P_3^s - {}^n P_3^i}{Z_3} \rho_3 S_3, \quad (15)$$

$${}^n V_y \left(\sum_{i=2,4} \rho_i S_i \right) = \sum_{i=2,4} {}^n V_i \rho_i S_i = \frac{{}^n P_2^s - {}^n P_2^i}{Z_2} \rho_2 S_2 + \frac{{}^n P_4^i - {}^n P_4^s}{Z_4} \rho_4 S_4. \quad (16)$$

Descrevendo o sinal espalhado em termos do sinal incidente utilizando a Eq. (10), bem como considerando a simplificações mencionadas anteriormente para os ramos, obtém-se

$${}^n V_x = \frac{{}^n P_1^i - {}^n P_3^i}{Z_g}, \quad (17)$$

$${}^n V_y = \frac{{}^n P_4^i - {}^n P_2^i}{Z_g}. \quad (18)$$

Finalmente, o seguinte conjunto de expressões é necessário para estabelecer as conexões e propagação do sinal acústico entre os nós:

$$\begin{aligned} {}^n P_1^i(x_d, y_d) &= {}^{n-1} P_3^s(x_d, y_d - 1), \\ {}^n P_2^i(x_d, y_d) &= {}^{n-1} P_4^s(x_d - 1, y_d), \\ {}^n P_3^i(x_d, y_d) &= {}^{n-1} P_1^s(x_d, y_d + 1), \\ {}^n P_4^i(x_d, y_d) &= {}^{n-1} P_2^s(x_d + 1, y_d), \end{aligned} \quad (19)$$

nas quais x_d e y_d são as posições discretas dos nós. Estas expressões são auxiliadas pela Fig. 4, que ilustra que cada um dos sinais espalhados em dado nó arbitrário n , em um passo de tempo anterior $(k-1)\Delta t$, se tornará um sinal incidente em seu nó adjacente no passo de tempo atual $k\Delta t$.

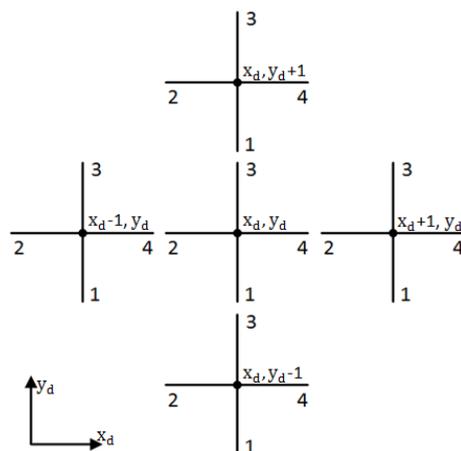


Fig. 4 - Posição cartesiana discretizada (x_d, y_d) de um nó arbitrário e seus adjacentes.

Vale lembrar que todas as expressões deduzidas para um nó sem perdas bidimensional podem ser derivadas para um nó genérico com um número

arbitrário de ramos, com perdas e comportamento anisotrópico, conforme algumas versões demonstradas em [3, 10, 13, 21]. Neste estudo em particular, utilizou-se um nó escalar tridimensional sem perdas [22] para a rede de nós interna a malha, o qual utiliza a equação de espalhamento

$$\begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^S \\ P_2^S \\ P_3^S \\ P_4^S \\ P_5^S \\ P_6^S \end{matrix} \right\} \\ k \end{matrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -2 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -2 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -2 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -2 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^i \\ P_2^i \\ P_3^i \\ P_4^i \\ P_5^i \\ P_6^i \end{matrix} \right\} \\ k \end{matrix} \quad (20)$$

e para os nós localizados nas adjacências ao contorno da malha, o processo de espalhamento e conexão é descrito na próxima seção.

2.1. Implementação DHM para as condições de fronteira utilizando filtros FIR

Uma fronteira pode ser modelada de diferentes maneiras, dependendo do método numérico utilizado e da aplicação em questão. No caso do método DHM, as fronteiras são incorporadas no modelo a partir de valores de impedância de superfície Z_s ou fator de reflexão Γ_s no domínio do tempo, impostas as extremidades dos ramos dos nós adjacentes ao limite da fronteira, conforme ilustrado na Fig. 5. O sinal de pressão ${}_{k-1}p_3^s$, no instante $(k-1)$, segue na direção da fronteira após o espalhamento gerado pelo nó adjacente. Ao atingi-la, o mesmo é refletido na proporção definida pelo fator de reflexão Γ_s , resultando na pressão ${}_k p_3^i$. Este fator expressa uma razão entre as amplitudes das pressões refletida e incidente.

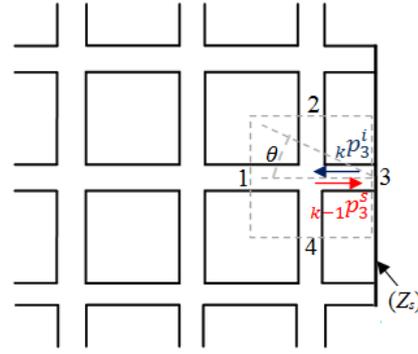


Fig. 5 - Impedância de superfície na fronteira da malha

Se considerarmos uma situação cuja incidência é aleatória, a impedância expressa a razão entre pressão e velocidade de partícula, assim como aplicando as condições de contorno, obtém-se o fator de reflexão para um dado ângulo de incidência θ [11]:

$$\Gamma_s(\theta) = \frac{p_s^r}{p_s^i} = \frac{Z_s \cos \theta - Z_g}{Z_s \cos \theta + Z_g} = \frac{{}_k p_3^i}{{}_{k-1} p_3^s} \quad (21)$$

nas quais Z_s e Z_g são, respectivamente, a impedância de superfície e a impedância da guia de onda. Entretanto, no modelo de impedância normalmente aplicado no método DHM, admite-se que o material da fronteira possui comportamento localmente reativo, ou seja, a componente normal da velocidade de partícula na fronteira depende apenas da pressão sonora em frente ao nó da superfície, e não da pressão nos nós adjacentes. Portanto, o comportamento reflexivo ou impedância independe do ângulo de incidência da onda e, assim, para uma incidência normal ($\theta = 0$) à superfície obtém-se:

$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_g}{Z_s + Z_g} \quad (22)$$

Desta forma, o processo de conexão com o momento seguinte é realizado utilizando a seguinte expressão:

$${}_k p^i = \Gamma_s \cdot {}_{(k-1)} p^s \quad (23)$$

Para garantir o sincronismo dos pulsos da malha durante os processos de espalhamento e conexão, é importante que a impedância de superfície seja definida na malha em uma distância dos nós que garanta um intervalo de tempo fixo Δt . Considerando as fronteiras como sistemas ideais e estabelecendo uma analogia com a versão do método utilizado em estudos de eletromagnetismo, a impedância, o fator de reflexão e coeficiente de absorção podem assumir os seguintes valores extremos [4, 5, 7, 9, 11, 13]:

$Z_s \ll Z_g$; $\Gamma \rightarrow -1$; $\alpha \rightarrow 0$, modelando uma parede "macia" (*soft wall*) ou um condutor perfeito (curto-circuito) no caso do eletromagnetismo, resultando em ondas refletidas com fase oposta a onda incidente. ex.: interface água-ar;

$Z_s \gg Z_g$; $\Gamma \rightarrow 1$; $\alpha \rightarrow 0$, modelando uma parede rígida (*hard wall*) ou uma parede magnética (circuito aberto) no caso do eletromagnetismo, resultando em ondas refletidas em fase com a onda incidente. ex.: parede de concreto;

$Z_s = Z_g$; $\Gamma = 0$; $\alpha \rightarrow 1$, modelando a propagação de campos no espaço aberto (*free field*) ou o casamento de impedâncias, o que repercute em absorção total da onda incidente. ex.: câmara anecóica.

Os fatores de reflexão tanto podem assumir um valor fixo, permitindo a análise de uma única frequência ou múltiplas frequências se o material comportar-se como não dispersivo, quanto assumir um conjunto de valores relacionados com a resposta impulsiva do material. Este último modelo possibilita a análise no domínio do tempo quando o material pertencente à malha apresenta um comportamento dispersivo ou variável com a frequência. A alternativa direta é transformar valores já conhecidos da impedância de superfície no domínio da frequência para valores de fator de reflexão e posteriormente para o domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Fourier. Entretanto, em virtude do grande número de coeficientes, esta abordagem se mostra inviável

ao convoluir os dados de absorção com o sinal da onda incidente. Diante desta limitação computacional, para representar o material em um método numérico como o DHM, utiliza-se uma espécie de resposta impulsiva truncada, ou seja, com um número de coeficientes muito menor que a resposta impulsiva completa. Esta resposta truncada pode ser obtida e incluída no algoritmo através da utilização de um filtro FIR. O filtro digital FIR é caracterizado por uma equação a diferenças¹ ou resposta filtrada $y(k)$ resultante de uma combinação linear dos valores prévios e atuais do sinal de entrada $x(k)$. Em outras palavras, a saída resultante da passagem do sinal pelo filtro FIR digital genérico é dada por, uma convolução entre o sinal de entrada e os coeficientes do filtro², conforme:

$$y(k) = \sum_{i=0}^N h_i x(k-i), \quad (24)$$

na qual N é a ordem do filtro, $x(k)$ o sinal de entrada, $y(k)$ o sinal de saída e h_i os coeficientes do filtro. Fazendo uma analogia desta equação com os dados apresentados pela Fig. 5 e Equação (23), tem-se que o sinal de saída $y(k)$ representa o sinal refletido pela fronteira que se tornará a pressão sonora incidente ${}_k p_r^i$ em um nó adjacente e $x(k)$ representa a pressão sonora espalhada pelo nó ${}_{k-1} p_r^s$ no instante anterior. O fator de reflexão Γ neste caso é representado no domínio do tempo pelos $(N+1)$ coeficientes h_i do filtro FIR projetado. O algoritmo implementado é capaz de realizar esta operação para um conjunto qualquer de nós pertencentes à fronteira, representando a região onde existe um material com impedância variável na frequência, porém em uma simulação no domínio do tempo. Resultados obtidos pela implementação deste conceito podem ser verificados no Item 3. Os coeficientes FIR foram calculados utilizando o método dos mínimos quadrados. Os resultados obtidos com a aplicação deste conceito são discutidos na próxima seção.

¹ Equação utilizada em sinais digitais.

² Estes coeficientes podem ser obtidos de forma indireta através de diferentes técnicas matemáticas ou mesmo através de modelos concebidos diretamente no domínio do tempo..

3. Resultados Numéricos

3.1. Caracterização do Modelo

A fim de validar o método discreto de Huygens descrito na seção anterior, uma cavidade acústica foi simulada com e sem considerar um material acústico aplicado em sua fronteira superior. Em primeiro lugar, na Seção 3.2, um modelo analítico e um modelo de elementos finitos (abordagem direta) da cavidade sem absorção são utilizados para validar os resultados DHM. Nas Seções 3.3 e 3.4, quando se considera materiais acústicos, cinco das faces da cavidade são definidos como rígidas, enquanto que para uma face (superior), a condição de contorno é definida utilizando os valores de impedância complexa (FEM) e fator de reflexão (DHM). O sistema físico está ilustrado na Fig. 6 e detalhado na Tabela 3.1.

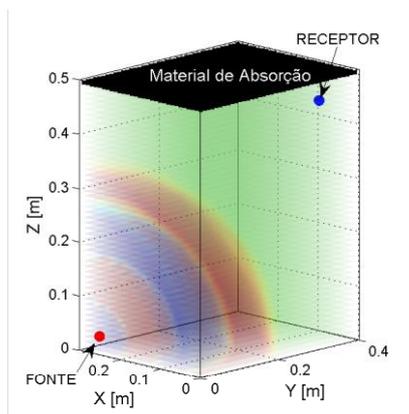


Fig. 6 - Sistema físico aplicado em FEM e DHM

Tabela 3.1 - Informações da Cavidade (FEM e DHM)

Parâmetros	Valores
Dimensões da Cavidade [m]	0,3 x 0,4 x 0,5
Dimensões do nó [m]	0,01 x 0,01 x 0,01
Número de nós	60.000 (30 x 40 x 50)
Posição da fonte [m]	S (0,03; 0,03; 0,03)
Posição do Receptor [m]	R (0,25; 0,35; 0,45)

Os parâmetros de simulação para todos os casos apresentados são obtidos através da definição da frequência de corte do problema analisado. Uma vez que esta informação é conhecida, a resolução espacial necessária pode ser calculada utilizando o critério $\Delta l \leq 0.1 v_g / f_c$ [2, 5, 6, 9], na qual f_c é a frequência de corte e $v_g = c\sqrt{3}$ é a velocidade da guia de onda [10][23][10, 23]. Finalmente, o intervalo de tempo adotado pode ser obtido utilizando a expressão $\Delta t = \Delta l / v_g$. A fonte monopolo (em vermelho - Fig. 6a) foi considerada em ambos os modelos e posicionada na coordenada S (0,03; 0,03; 0,03). No método DHM, a função impulso é utilizada como sinal de entrada, uma vez que esta fonte excita idealmente infinitas frequências do espectro. No entanto, em situações práticas, uma função sinc $x(t) = \text{sinc}(\pi f_c t)$ com frequência de corte f_c deve ser utilizada a fim de reduzir a influência do erro de *aliasing* na operação FFT (*Fast Fourier Transform*) para o cálculo da resposta em frequência $H(K)$, funcionando como um filtro passa-baixa. O receptor (em azul - Fig. 6a) foi colocado perto do canto oposto a fonte, coordenada R(0,25; 0,35; 0,45), procurando maximizar a intensidade dos modos acústicos. A partir da função de resposta ao impulso é possível obter por meio da FFT, as funções de transferência entre a fonte e o ponto receptor para o campo acústico gerado no interior da cavidade.

3.2. Cavidade Rígida

Com a finalidade de reforçar a validação do código DHM implementado, utilizou-se como referência um modelo FEM no domínio da frequência e um modelo analítico, considerando a cavidade com paredes rígidas. O modelo analítico baseia-se na expansão dos modos da cavidade conforme apresentado em [11, 24].

$$p(x, y, z, t) = \rho c^2 \hat{U} \sum_{i,j,k=0}^{I,J,K} \frac{\omega \Psi_{ijk}(x, y, z) \Psi_{ijk}(x_0, y_0, z_0)}{V_{ijk}(\omega^2 - \omega_{ijk}^2)} \cos(\omega t(25) + \phi - \pi/2),$$

na qual ρ e c são a densidade e velocidade do som, respectivamente, \hat{U} é a velocidade de volume, Ψ_{ijk} e $f_{ijk} = \omega_{ijk}/2\pi$ são as funções que definem as formas modais e frequências naturais, respectivamente, V_{ijk} é o volume modal e i, j, k são os índices modais em cada direção Cartesiana. Para as simulações, utilizaram-se os dados detalhados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Parâmetros e resultados da simulação

Parâmetros	Valores
Tempo de simulação (t_s)	0,5 s
Passo de tempo (Δt)	$\cong 1,68 \times 10^{-5}$ s
Número de iterações	17.846
Passo de frequência (Δf)	2 Hz
Velocidade de volume (\hat{U})	$1e^{-5}$ m ³ /s
Tempo de processamento da CPU ^a	DHM $\cong 255$ s FEM $\cong 16.200$ s

a. Processador Intel Core (TM) i7 CPU @ 2.93 GHz 6 GB RAM, Windows 64 bits

Vale observar que o código implementado necessitou de 255 s para finalizar a simulação, aproximadamente 63 vezes mais rápido que a simulação em elementos finitos. A Fig. 7 ilustra os resultados para as respostas em frequência obtidas pelo método FEM (Comsol v4.3[®]), DHM (DHM3D) e utilizando o modelo analítico. Como consequência do tempo de simulação adotado, $t_s = 0,5$ s, o passo de frequência obtido após aplicação da transformada de Fourier é igual a $\Delta f = 2$ Hz. Observa-se que a discretização espectral conduz a diferenças de amplitude entre as curvas, especialmente na região das frequências de ressonância. Uma vez que a ressonância corresponde a um pico de amplitude, mesmo pequenos deslocamentos na frequência, podem resultar em diferenças significativas. Portanto, o aumento da resolução espectral tende a reduzir este erro.

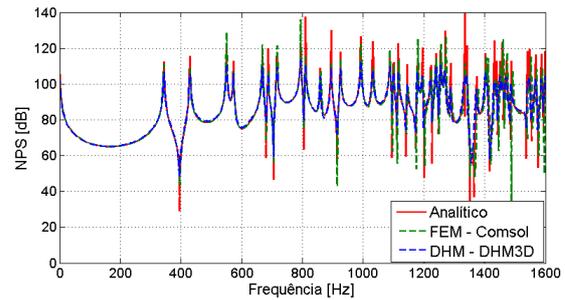
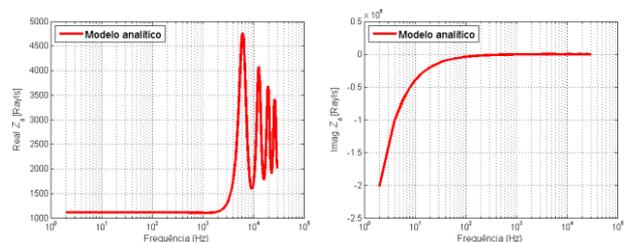


Fig. 7 - Resposta em frequência - Cavidade Rígida

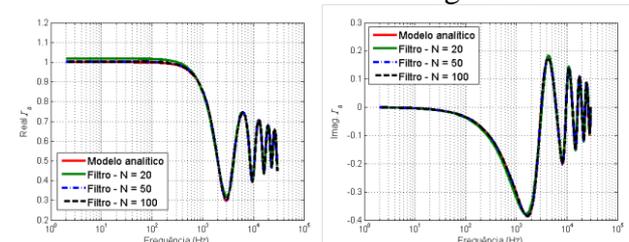
Nas próximas seções, dois tipos de material absorvedor sonoro (fictício e melamina) são utilizados para validar a representação das condições de contorno utilizando filtros FIR.

3.3. Filtro FIR – Material Fictício

Coefficientes FIR para um material fictício foram indiretamente obtidos a partir de dados calculados utilizando o modelo analítico no domínio da frequência apresentado em [25-26], considerando os seguintes parâmetros: tortuosidade 1,5, porosidade de 20%, resistividade ao fluxo de 100.000 N.s/m⁴ e espessura da amostra de 0,02 m. A partir destes valores, as partes reais e imaginárias da impedância superfície (Z_s) foram obtidos e aplicados diretamente na simulação em elementos finitos. Os valores do fator de reflexão (Γ_s) foram utilizados como dados de entrada no cálculo dos coeficientes no domínio de tempo, necessários para a simulação DHM.



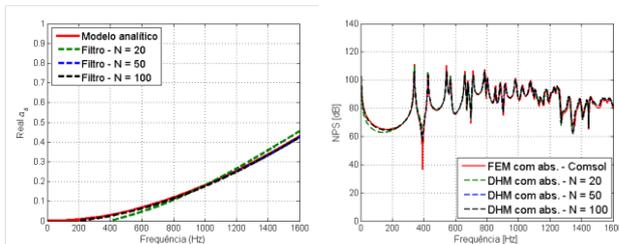
a) Impedância - Parte Real b) Impedância - Parte Imaginária



c) Fator de Reflexão - Parte Real d) Fator de Reflexão - Parte Imaginária

Fig. 8 - Impedância de superfície e fator de reflexão no domínio da frequência - Material Fictício

Os valores de referência (modelo analítico) para impedância complexa (Z_s) podem ser verificados na Fig. 8a e 8b. A convergência para o valor de referência do fator de reflexão complexo (Γ_s) e coeficiente de absorção (α_s) para três ordens de filtro diferentes ($N = 20$; $N = 50$; $N = 100$) estão ilustrados respectivamente nas Fig. 8c, 8d e Fig. 9a. Neste caso, observa-se que os erros mais significativos ocorrem apenas quando se utiliza um filtro de ordem $N = 20$. O impacto destes erros pode ser identificado no gráfico da Fig. 9b, que ilustra a resposta em frequência da cavidade obtida via FEM e via DHM para as três opções de ordem de filtro.



a) Coeficiente de absorção b) Resposta em frequência

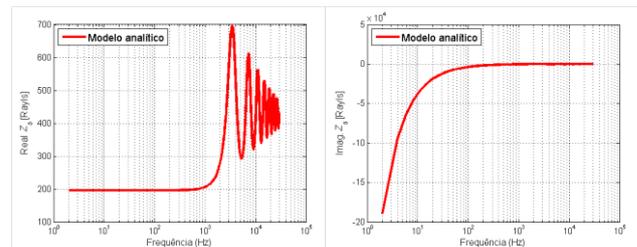
Fig. 9 - Resultados após aplicação do material fictício

Em geral, tem-se um bom nível de concordância entre as curvas. Pequenos erros podem ser observados para frequências inferiores a 200 Hz, especialmente quando $N = 20$. Neste tipo de material, a utilização de um filtro com ordem 50 é suficiente para garantir uma boa precisão. Os resultados são dependentes de diferentes fatores, particularmente o tipo e a ordem do filtro, bem como a técnica matemática utilizada para calcular seus coeficientes. Se a curva de referência no domínio da frequência tem uma variação suave, pode-se esperar que os filtros de ordem relativamente baixa sejam capazes de representar o comportamento do material em uma simulação de domínio

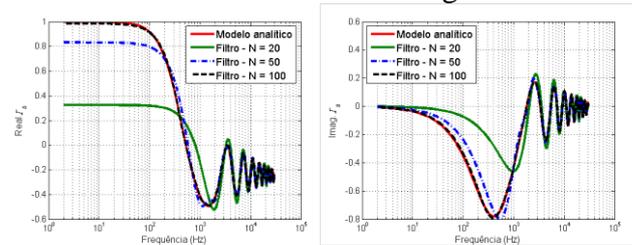
de tempo. A fim de tornar confirmar o procedimento adotado, outro material é analisado na seção seguinte.

3.4. Filtro FIR – Melamina

De forma análoga à seção anterior foram realizadas simulações considerando o material de absorção melamina, que é comumente utilizado em tratamentos acústicos. Neste caso, os parâmetros de entrada para obtenção da curva de referência foram estimados com base em dados experimentais [26]. Desta forma, utilizou-se: tortuosidade 1,0, porosidade de 99%, resistividade ao fluxo de 9.500 N.s/m^4 e espessura da amostra de $0,043 \text{ m}$. A curva de impedância complexa de referência (Z_s) pode ser verificada na Fig. 10a e 10b. A convergência para o valor de referência do fator de reflexão complexo (Γ_s) e coeficiente de absorção (α_s) para três ordens de filtro diferentes ($N = 20$; $N = 50$; $N = 100$) estão ilustrados respectivamente nas Fig. 10c, 10d e Fig. 11a.



a) Impedância - Parte Real b) Impedância - Parte Imaginária

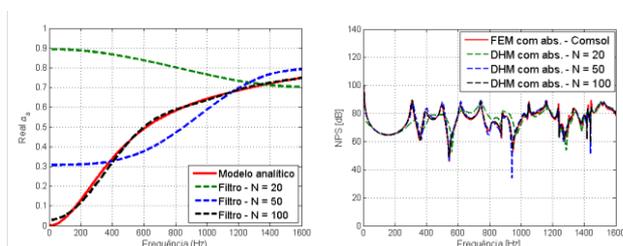


c) Fator de Reflexão - Parte Real d) Fator de Reflexão - Parte Imaginária

Fig. 10 - Impedância de superfície e fator de reflexão no domínio da frequência - Melamina

A Fig. 11b ilustra a resposta em frequência da cavidade após a aplicação do filtro FIR. É possível identificar desvios do valor de referência, especialmente para ordem $N = 20$, o que demonstra

que, para a melamina, torna-se mais difícil representar a curva de referência utilizando poucos coeficientes do filtro. Quanto maior a ordem do filtro, mais próximo da curva de referência. Ainda que ordens de filtro mais elevadas tornem-se necessárias para descrever adequadamente o comportamento da melamina no domínio do tempo, o algoritmo DHM apresenta um desempenho consideravelmente melhor que as simulações computacionais em elementos finitos (ref. Tabela 3.3), sem degradar significativamente o tempo de simulação em relação ao caso quando não há elementos com absorção.



a) Coeficiente de absorção b) Resposta em frequência

Fig. 11 - Resultados após aplicação da Melamina

É importante notar que o algoritmo implementado permite incorporar modelos em que o fator de reflexão é dependente de outras variáveis, tais como ângulo de incidência. No entanto, para a análise apresentada, presume-se que a influência dessa variável é pequena e a incidência é normal a superfície..

Tabela 3.3 - Síntese dos dados da simulação para ambos os materiais - com absorção

Parâmetros	Valores
Tempo de simulação (t_s)	0,5 s
Passo de tempo (Δt)	$\cong 1,68 \times 10^{-5}$ s
Número de iterações	17.846
Passo de frequência (Δf)	2 Hz
Tempo de processamento da CPU ^a	DHM (N = 20) \cong 300 s DHM (N = 50) \cong 310 s DHM (N = 100) \cong 325 s FEM \cong 16.200 s

a. Processador Intel Core (TM) i7 CPU @ 2.93 GHz 6 GB RAM, Windows 64 bits

Em resumo, o conceito chave do procedimento consiste em obter, através de técnicas matemáticas eficientes, coeficientes capazes de descrever adequadamente materiais dependentes da frequência em uma simulação no domínio do tempo, sem degradar significativamente o desempenho computacional.

4. Conclusões

Neste estudo foi realizada a implementação de um algoritmo para representação do comportamento acústico de materiais no domínio do tempo utilizando filtros FIR. O fator de reflexão pode ser representado por um conjunto de coeficientes relacionados com a resposta impulsiva do material, o que permite a análise multifrequencial em uma única rodada de simulação do método DHM. Dois tipos de materiais foram considerados utilizando como dados de referência a resposta em frequência obtidas a partir de simulações em elementos finitos. Em ambos os casos, os resultados apresentaram elevado nível de concordância, porém, com grande vantagem em favor do método DHM no que tange ao tempo de processamento. Diante destes resultados, pode-se concluir que filtros FIR podem ser aplicados com sucesso na modelagem do fator de reflexão no domínio do tempo. Outras técnicas baseadas em modelos analíticos no domínio do tempo e também no projeto de filtros de resposta ao Impulso (IIR) devem ser exploradas a fim de investigar as soluções que produzam melhores resultados em termos de concordância com os dados de referência e custo computacional. Estas técnicas podem ser complexas e requerem atenção especial por parte do pesquisador, possibilitando que muitos estudos futuros sejam desenvolvidos.

5. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a CAPES e CNPq pelo financiamento da pesquisa.

6. Referências

- [1] Christian Huygens, *Traité de la lumière*, GAUTHIER-VILLARS ET CIE, Ed. Paris, 1920.
- [2] Peter B. Johns and Raymond L. Beurle, "Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix," *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 118, pp. 1203-1208, 1971.
- [3] Y. Kagawa, T. Tsuchiya, B. Fujii, and K. Fujioka, "Discrete Huygens' Model approach to sound wave propagations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 218, no. 3, pp. 419-444, 1998.
- [4] Suhas V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mary A. Phillips and Edward M. Millmann, Ed.: Taylor&Francis, 1980.
- [5] Donard de Cogan, William J. O'Connor, and Susan Pulko, *Transmission Line Matrix (TLM) in Computational Mechanics*: CRC Press, Inc., 2005.
- [6] Christos Christopoulos, *The Transmission-Line Modeling Method: TLM*, Donald G. Dudley, Ed.: Wiley-Blackwell, 1995.
- [7] V. Trenkic, C. Christopoulos, and T. M. Benson, "Simple and Elegant Formulation of Scattering in TLM Nodes," *Electronics Letters*, vol. 29, no. 18, pp. 1651-1652, 1993.
- [8] Jonathan L. Herring, "Developments in the Transmission-Line Modelling Method for Electromagnetic Compatibility Studies," University of Nottingham, 1993.
- [9] Christos Christopoulos, "The Transmission-Line Modeling (TLM) Method in Electromagnetics," *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics*, vol. 1, no. 1, pp. 1-132, 2006.
- [10] R.S.T. Carvalho, "Modelo Físico de Huygens na solução discretizada de campos acústicos," Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.
- [11] Heinrich Kuttruff, *Room Acoustics*, 4th ed., Taylor & Francis, Ed.: Taylor & Francis, 2001.
- [12] Jan Hofmann and Kurt Heutschi, "Simulation of outdoor sound propagation with a transmission line matrix method," *Applied Acoustics*, vol. 98, pp. 158-172, 2007.
- [13] Gwenaël Guillaume, Judicaël Picaut, Guillaume Dutilleux, and Benoît Gauvreau, "Time-domain impedance formulation for transmission line matrix modelling of outdoor sound propagation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, pp. 6467-6481, 2011.
- [14] Takao Tsuchiya, "Numerical Simulation of Sound Wave Propagation with Sound Absorption Using Digital Huygens' Model," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 46, no. 7B, pp. 4809-4812, 2007.
- [15] Konrad Kowalczyk and Maarten van Walstijn, "Formulation of Locally Reacting Surfaces in FDTD/K-DWM Modelling of Acoustic Spaces," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 94, pp. 891-906, 2008.
- [16] Peter B. Johns, "A new mathematical model to the physics of propagation," *Radio and Electronic Engineer*, vol. 44, no. 12, pp. 657-666, 1974.
- [17] Peter Enders, "Huygens' principle and the modelling of propagation," *European Journal of Physics*, vol. 17, no. 4, p. 226, 1996.
- [18] Peter Enders and Christian Vanneste, "Huygens' principle in the transmission line matrix method (TLM). Global theory," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 14, pp. 1099-1204, 2001.
- [19] Peter Enders and Christian Vanneste, "Huygens' principle in the transmission line matrix method (TLM). Local theory," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 16, pp. 1099-1204, 2003.
- [20] Peter Enders, "Huygens' Principle as Universal Model of Propagation," *Latin-American Journal of Physics Education*, vol. 3(1), pp. 19-32, 2009.
- [21] Gwenaël Guillaume, Judicaël Picaut, Guillaume Dutilleux, and B. Gauvreau, "Use of the transmission line matrix method for the sound propagation modelling in open-space," 2008.
- [22] Dok Hee CHOI and Wolfgang J.R. HOEFER, "The simulation of three dimensional wave propagation by a scalar TLM model," *IEEE MTT-S DIGEST*, pp. 70-71, 1984.

- Spaces," *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 94, pp. 891–906, 2008.
- [16] Peter B. Johns, "A new mathematical model to the physics of propagation," *Radio and Electronic Engineer*, vol. 44, no. 12, pp. 657-666, 1974.
- [17] Peter Enders, "Huygens' principle and the modelling of propagation," *European Journal of Physics*, vol. 17, no. 4, p. 226, 1996.
- [18] Peter Enders and Christian Vanneste, "Huygens' principle in the transmission line matrix method (TLM). Global theory," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 14, pp. 1099-1204, 2001.
- [19] Peter Enders and Christian Vanneste, "Huygens' principle in the transmission line matrix method (TLM). Local theory," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 16, pp. 1099-1204, 2003.
- [20] Peter Enders, "Huygens' Principle as Universal Model of Propagation," *Latin-American Journal of Physics Education*, vol. 3(1), pp. 19-32, 2009.
- [21] Gwenaël Guillaume, Judicaël Picaut, Guillaume Dutilleul, and B. Gauvreau, "Use of the transmission line matrix method for the sound propagation modelling in open-space," , 2008.
- [22] Dok Hee CHOI and Wolfgang J.R. HOEFER, "The simulation of three dimensional wave propagation by a scalar TLM model," *IEEE MTT-S DIGEST*, pp. 70-71, 1984.
- [23] Y. Kagawa, T. Tsuchiya, K. Fujioka, and M. Takeuchi, "Discrete Huygens' Model approach to sound wave propagations--Reverberation in a room, sound source identification and tomography in time reversal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, no. 1, pp. 61-78, 1999.
- [24] Douglas D. Reynolds, *Engineering Principles of Acoustics*. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1981.
- [25] Julian Tizianel et al., "Transport parameters and sound propagation in an air-saturated sand," *Journal of Applied Physics*, vol. 86, novembro 1999.
- [26] Paulo Henrique Mareze, "Análise da influência da microgeometria na absorção sonora de materiais porosos de estrutura rígida," Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.