

Análise modal e estabilidade em pilares de paredes finas: abordagens com a Técnica do Meio Contínuo e o Método dos Elementos Finitos

Fonseca, C. C. F.¹ ; Melo, W. I. G.¹ 

¹ Engenharia Civil, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Cabo de Santo Agostinho, PE, wesley.gomes@ufrpe.br

Resumo

A modelagem de qualquer estrutura pode ocorrer por técnicas contínuas ou por métodos de discretização, ressaltando-se que as primeiras conduzem, em geral, a equacionamentos mais complexos e decorrentes sistemas de equações diferenciais. Acontece que o segundo tipo de análise é bastante recorrente e aplicado nos dias atuais, devido à acessibilidade de softwares, porém faz-se necessário grande destreza para verificar os resultados obtidos por meio de análises por técnicas contínuas. Neste sentido, este artigo apresenta o estado da arte da análise modal e do problema de estabilidade elástica em núcleos estruturais via Técnica do Meio Contínuo (TMC) e pelo Método dos Elementos Finitos — elemento de barra (MEF-EB). A apresentação ocorreu como se segue: a ideia base da modelagem pela TMC; o elenco da relevância ao inovar a distribuição dos lintéis e a formação dos sistemas de contraventamento Z e X; a apresentação do histórico da TMC, evidenciando seu declínio produtivo na passagem do século e seu resgate por Melo e demais autores; a explicitação da metodologia de cálculo da carga crítica (estabilidade) através de análise pela TMC; e o elenco de uma sequência lógica para que futuros pesquisadores possam estudar a TMC e suas aplicações. Por fim, o presente artigo permite a compreensão da potencialidade da TMC e propõe um roteiro base para seu aprendizado, bem como, evidencia a aplicabilidade, consciente, do MEF-EB na análise dos citados pilares contraventados.

Palavras-chave: núcleo estrutural, técnica do meio contínuo, estabilidade, modos de vibração, elemento de barra.

PACS: 43.40.Cw, 43.40.-r, 43.55.Wk, 43.40.Qi, 43.38.Ar.

Modal analysis and stability in thin-walled columns: approaches using the Continuous Medium Technique and the Finite Element Method

Abstract

The modeling of any structure can be achieved through continuous techniques or discretization methods, noting that the former generally lead to more complex equations and resulting systems of differential equations. However, the latter type of analysis is quite common and applied in contemporary times due to the accessibility of software. Nonetheless, significant skill is required to validate the results obtained through analyses employing continuous techniques. In this context, this article presents the state of the art in modal analysis and the elastic stability problem in structural cores using the Continuous Medium Technique (CMT) and the Finite Element Method — bar element (FEM-BE). The presentation unfolded as follows: The foundational concept of modeling through CMT; Emphasis on the innovation of lintel distribution and the formation of Z and X bracing systems; Historical overview of CMT, highlighting its decline in productivity in the transition of centuries and its revival by Melo and other authors; Explanation of the methodology for calculating critical load (stability) through CMT analysis; Articulation of a logical sequence for future researchers to study CMT and its applications. In conclusion, this article facilitates an understanding of the potential of CMT and proposes a foundational framework for its acquisition, while also highlighting the conscious applicability of FEM-BE in the analysis of the mentioned braced pillars.

Keywords: structural core, continuous medium technique, stability, vibration modes, bar element.

1. INTRODUÇÃO

De forma geral, os pilares de pontes são submetidos a esforços solicitantes de grande magnitude, tornando-se bastante significativa a ação do vento, principalmente quando posicionados em vales profundos. Isso ocorre devido à elevada cota da mesoestrutura em relação à base dos pilares, bem como os pilares tornam-se esbeltos, por racionalidade estrutural.

Outro agravante é o lançamento estrutural de pilares altos de pontes com seção transversal em formato de paredes finas, os denominados núcleos estruturais. Desta forma, ao conferir racionalidade/economia ao pilar, surge a necessidade de lançar um sistema conveniente de contraventamento. Nesta revisão da literatura serão apresentados enfoques para lintéis promovendo o contraventamento do núcleo estrutural, por meio da costura da face aberta, e sobre três configurações: a primeira com lintéis horizontais e espaçados uniformemente na altura do pilar. A segunda configuração é a disposição dos lintéis em Z (lintéis horizontais intertravados com barras inclinadas). Além disso, há a terceira configuração disposta em X.

Cabe ressaltar que o formato dos pilares, por ser de paredes finas, gera a ativação de esforços oriundos da ação conjunta da flexão e da torção, tornando-se relevante o histórico de estudos do centro de torção D , do empenamento e , conseqüente, variação da rotação ϕ em torno do eixo axial em D , além do bimomento. Quanto às soluções estruturais mediante a Técnica do Meio Contínuo (TMC) serão apresentadas com ênfase na Teoria dos Painéis-Parede (TPP).

Atualmente a análise modal dos núcleos estruturais é processada, em grande maioria dos escritórios de cálculo estrutural, mediante *software* baseados na discretização pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Ocorre, porém, que em sua maioria, os engenheiros estruturais possuem apenas a graduação e algum curso de especialização, o que implica em pífio aprofundamento nos conceitos inerentes ao processamento adequado pelo MEF. Desta maneira, mesmo com o avanço das pós-graduações no território brasileiro, ainda é constatado que muitos engenheiros

recém-formados conduzem seus escritórios de análise e dimensionamento estrutural baseando-se unicamente nas soluções advindas do mero emprego dos manuais de utilização de *software* comerciais. Este fato acarreta certo dimensionamento às cegas, sem que o engenheiro possa analisar criticamente todas as etapas da análise procedida.

A abordagem física e matemática, presente em Rosman [1]; Rehgozar e Malekinejad [2] e Melo [3], culmina no *Fluxograma de Desacoplamento* do sistema de EDPs (Equações Diferenciais Parciais) que rege a solicitação dinâmica da TPP. Além disso, em Melo e Barbosa [4–6] e em Melo; Luz e Barbosa [7] fica evidenciado o procedimento formal para a resolução da EDP desacoplada no *Sistema Generalizado de Coordenadas*, com ênfase na análise modal do pilar.

1.1 Ideia base da modelagem pela TMC

A modelagem estrutural por técnicas contínuas parte do pressuposto da expressão de esforços/deformações ou deslocamentos em equações válidas em todo o domínio da estrutura, trocando o problema real por um meio equivalente com propriedades elasto-mecânicas e ações/solicitações uniformizadas, conforme aponta Beck [8].

Os casos mais estudados tratam da quantificação de deflexões laterais, em geral, para a flexão dos lintéis. O mencionado equacionamento ocorre a partir do equilíbrio do elemento diferencial do núcleo estrutural. Ademais, em tais análises almeja-se expressar os seguintes parâmetros elásticos: deslocamentos lineares e angulares; esforços solicitantes; modos de vibração; e até carga de flambagem.

No entanto, deve-se atentar que o MEF e as demais técnicas discretizadoras seguem em contramão ao procedido na TMC, uma vez que analisa a estrutura por meio de trechos, com equações válidas em tal e não para todo o seu comprimento. Em seguida, o MEF integra a estrutura ao equacionamento procedido, elemento a elemento, através da análise matricial dos efeitos nodais dos ditos Elementos Finitos (EF).

Conforme elencado por Beck [8], observa-se que a utilização da TMC é impulsionada para possibilitar a resolução simplificada do pórtico plano/viga Vierendeel de elevado grau de indeterminação hiperestática. Nesse artigo é mencionada ainda a ideia precursora de Marneffe [9] advinda da aplicação de sistemas equivalentes ao hiperestático em tela.

Quanto à modelagem dos lintéis de contraventamento, parte-se da formulação das equações de equilíbrio de esforços solicitantes, isso para o elemento finito de barra formulado por George Alfred Maney [10], cujo propósito inicial era a análise estrutural de pórticos planos. Esta foi aplicada por Goldberg [11] para computar a ação do vento, também em pórticos planos. E por fim, em MacLeod [12] constata-se a aplicação das Equações de Maney para estendê-las para os núcleos estruturais, onde os lintéis horizontais funcionam como vigas e a ligação Lintel — Painel-Parede é modelada via trecho infinitamente rígido, como mostra a Figura 1.

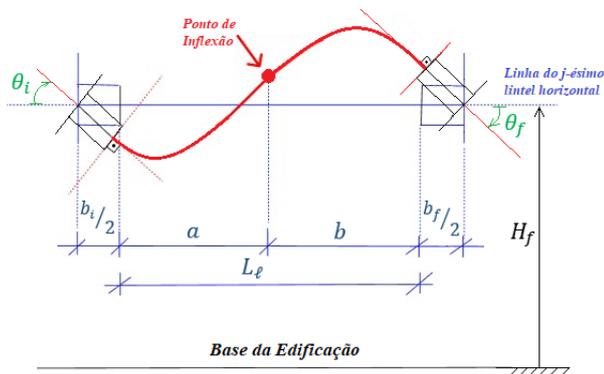


Figura 1: Configuração deformada do j -ésimo lintel horizontal com trechos extremos infinitamente rígidos à flexão.

Em tempos mais atuais, constata-se tal emprego em Varjú e Prokié [13] e Melo e Barbosa [4], isso para o contraventamento de núcleos estruturais formados por lintéis horizontais, e sob distribuição uniforme ao longo da altura do pilar. Além disso, promove a ligação entre os painéis-parede, extremos na face aberta, por meio dos mencionados lintéis. Analisando a literatura especializada percebe-se a modelagem do contraventamento de núcleos estruturais por lintéis unicamente na horizontal. Porém, para o caso de pilares de pontes, metálicos ou de concreto armado, é recomendada a imposição de trava-

mentos diagonais na face aberta do núcleo estrutural, caracterizando assim a necessidade do Contraventamento em Z.

É neste sentido que se encontram os estudos de Ricaldoni [14, 15], onde são estudados os esforços solicitantes e deformações para pórticos planos, quando da promoção do travamento por barras/lintéis inclinados, o que remete ao caso realístico de pilares contraventados por lintéis na horizontal e intertravados por lintéis inclinados, configurando assim o Sistema de Contraventamento em Z.

1.2 Relevância da inovação nos lintéis

Desta forma, fica evidente que o contraventamento de pilares de paredes finas com seção aberta é processado na literatura com imposição unicamente de lintéis na horizontal. Porém, conforme é explicitado por Ricaldoni [15], e facilmente constatado mediante análise estrutural, percebe-se que ao promover o contraventamento de núcleos estruturais por meio de lintéis horizontais intertravados por lintéis em diagonal, torna-se o lançamento estrutural bastante racional e econômico. Ao modelo exposto por Ricaldoni [15] denomina-se, neste artigo, de *Sistema de Contraventamento em Z*.

Em especial, no caso de pilares de pontes com tabuleiro disposto sobre grandes vales profundos, gerando pilares altos e esbeltos, agrega-se viabilidade econômica atrelada à segurança estrutural, ao associar a seção transversal de paredes finas. E a tal seção, acresce-se um sistema de contraventamento por lintéis diagonais, conforme é ilustrado na Figura 2, cujas diagonais minoram em muito os deslocamentos laterais do já mencionado núcleo estrutural.

1.3 Determinação da carga de flambagem

Conforme discutido em Vlassov [16], o problema de estabilidade de pilares pode ser analisado sob o prisma de duas teorias. A primeira é denominada de Teoria do Equilíbrio no ponto de bifurcação, permitindo o equilíbrio estrutural para o eixo indeformado (1ª ordem) e para o eixo deformado (2ª ordem). Já o segundo gênero

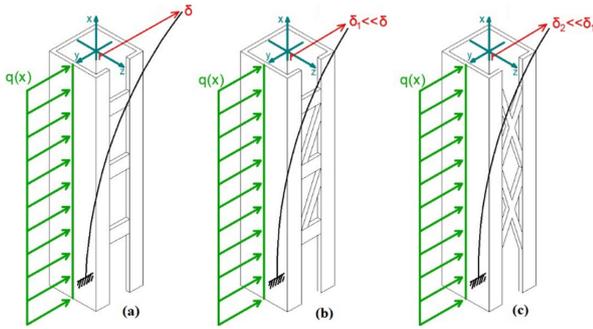


Figura 2: Exibição qualitativa da minoração dos deslocamentos laterais em núcleo C para contraventamento: (a) convencional; (b) em Z; e (c) em X (retirado de Melo; Luz e Barbosa [7]).

de análise é denominado de Teoria da variação dos estados deformados e decorre do incremento sucessivo da carga aplicada axialmente no pilar até que o deslocamento lateral se torne infinito, conforme ilustrado na Figura 3.

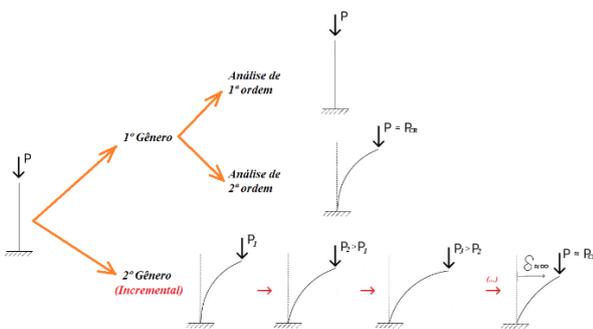


Figura 3: Gêneros de determinação da carga de flambagem para pilares.

1.4 Apreciação sobre as soluções em MEF

Na solução do problema, a princípio, de difícil processamento, é vantajosamente processado pelo MEF, cuja base é discretizar a estrutura em pequenos elementos e nestes são resolvidas as equações dominantes via equações polinomiais aproximadas e decorrente aplicação de condições de contorno. Torna-se então muito atrativo e versátil, daí seu vasto emprego cotidiano.

Apesar desta enorme vantagem, é importante frisar as limitações do MEF, quais sejam: necessidade de modelar precisamente as condições de contorno; dificuldade de processamento para problemas com elevado número de graus de liberdade (seja por capacidade de hardwares ou de rotinas otimizadas); e, possíveis instabilidades numéricas que evitem o processo de convergência dos resultados.

Essas limitações podem ser contornadas a partir do desenvolvimento de algoritmos mais eficazes e formulação de novos elementos finitos. No caso dos pilares de paredes finas, pode-se evidenciar o desenvolvimento de novos elementos finitos de barra, contemplando o contraventamento por lintéis, vide Figura 4.

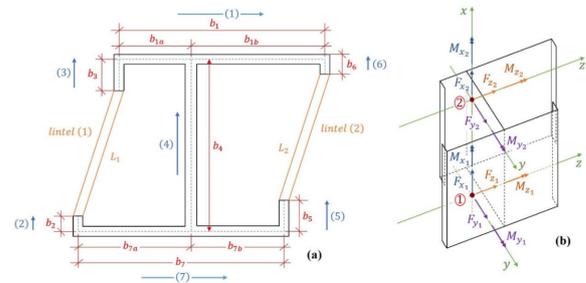


Figura 4: Novo elemento finito de barra para seção em duplo T contraventada por lintéis horizontais: (a) dados em planta e (b) convenção positiva dos efeitos nodais (retirado de Melo [3]).

2. ESTADO DA ARTE DA TMC

A TMC foi vastamente empregada na segunda metade do século XX, desde análises estáticas até a análise dinâmica de edifícios altos e demais estruturas, conforme se passará a demonstrar nos subitens subsequentes. Acontece que a disseminação de computadores acessíveis e com sistema operacional potente aumentou as vantagens do emprego do MEF para implementar as análises estruturais de forma prática e sem grandes esforços para adaptar o método, a geometria, e carregamentos envolvidos. Com isso, a TMC ficou escanteada por exigir esforço matemático para adaptá-la para cada caso, gerando baixa na quantidade de publicações relativas a seu emprego.

Apesar da diminuição no número de publicações envolvendo a TMC na análise de estruturas, foi observada sua continuidade a fim de gerar ferramentas de verificação de modelagens em MEF por *software*. Neste sentido, passa-se a elencar o estado da arte da TMC por temática.

2.1 Análise estática dos painéis-parede

No contexto internacional, o efeito da flexo-torção em peças com seção transversal em núcleo estrutural foi inicialmente visualizado por

Bach [17], por meio de experimentos do funcionamento estrutural quando a carga atuante é aplicada fora do Centro de Torção. Para as pontes, o efeito de empenamento em pilares de paredes finas foi experimentalmente analisado por Bernstein [18].

Anos mais tarde, Bleich & Bleich [19] apresentaram um estudo teórico do problema de torção e da estabilidade para as paredes finas baseando-se na energia interna e modelando o caso da compressão axial da peça, concluindo um sistema com três equações diferenciais. Em seguida, surgiram os estudos de vários cientistas buscando promover o cálculo rápido e simplificado de peças em paredes finas abertas, porém foi Vlassov [20] que promoveu a aplicação de tais elementos estruturais na construção civil. Nesse estudo foi constatado que os valores de resistência para a peça de paredes finas aberta, pela nova formulação, considerando a Teoria da Flexo-Torção e o Bimomento, eram bem superiores aos valores postulados na Resistência dos Materiais clássica à época.

A tese de doutorado de Vlassov [20], depositada no “Institut des Ingénieurs-Constructeurs de Moscou”, desencadeou trabalhos futuros gerando três compêndios, quais sejam: Vlassov [21], com o título “Pièces Longues em Voiles Minces”; Vlassov [22], intitulado “La Statique des Constructions Spatiales em Voiles Minces”; e por fim, Vlassov [23], nomeado de “Théorie Générale des Voiles”. Desta forma, Vlassov criou um método de análise de núcleos estruturais de núcleos estruturais assumindo que a seção transversal de paredes finas é composta por placas finas/painéis-parede, denominadas assim por Mancini [24] e Barbosa [25], no qual é proposto uma solução esquemática inédita.

A única simplificação proposta por Vlassov [16] foi considerar que, nos lintéis de contraventamento dos painéis-parede, ocorre obrigatoriamente a formação de rótulas plásticas no meio do vão, o que para os casos de lintéis mais usuais é apresentado na Figura 5.

No contexto da América Latina citam-se os estudos percursos de: Ricaldoni [15,26]; Stamato e Smith [27]; Stamato [28] e Stamato [29], os

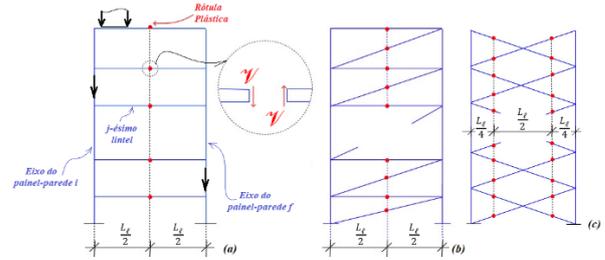


Figura 5: Formação de rótulas plásticas no meio dos vãos dos lintéis: (a) horizontais; (b) em Z; e (c) em X com nós centrais rígidos.

quais procederam suas pesquisas sob a ótica proposta por Vlassov [21] e com a aplicação prática em Edifícios Altos.

Em seguida, Mancini [24,30], um dos discípulos de Stamato, promove estudos da ação do vento em Edifícios Altos e cria então o termo “painéis-parede” para designar as paredes finas que tanto podem modelar pilares maciços, pórticos ou os núcleos estruturais. Assim, nesta senda, vem Barbosa [25] cunhando em títulos garrafais e aplicando os termos “Técnica do Meio Contínuo” e “painéis-parede”, veja páginas II-1 e II-55 da referida publicação. Nesse trabalho tem-se a aplicação da TMC em pilares em formato de núcleos estruturais, considerando apenas a atuação do vento, conforme é ilustrado na Figura 6 (a), além de impor a formação de rótulas plásticas no centro do vão dos lintéis.

Logo em seguida, encontra-se a publicação de Carvalho [31] analisando os núcleos estruturais com a consideração da carga vertical inerente aos pilares e mantendo a rotulação plástica dos lintéis no meio dos vãos, conforme consta na Figura 6 (b).

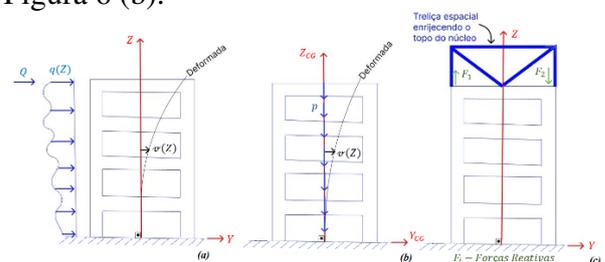


Figura 6: Núcleo estrutural: (a) com carga lateral do vento; (b) sob carga vertical, como cenários de carregamento; e (c) integrado à treliça espacial no topo.

Por fim, vários pesquisadores contribuíram ao longo dos anos 1980 e 1990 para a aplicação da TMC proposta inicialmente no Brasil por Stamato [32], mesmo sem a intitular formalmente,

mas procedendo toda a estruturação para a mencionada teoria. Na Livre Docência de Mancini [33] consta um rico apanhado histórico das pesquisas desenvolvidas via TMC e aplicadas a Edifícios Altos, que vai desde o ano de 1971 com Stamato até o ano de 1995 com o referido trabalho, no qual contribui com a TMC ao integrar ao Núcleo Estrutural C uma treliça espacial no topo, conforme consta na Figura 6 (c).

As publicações da TMC aplicada a Edifícios Altos não pararam por aí. Foram intercaladas até prelúdios dos anos 2000, de quais se cita Mancini e Savassi [34]. Em seguida, a TMC ficou relativamente esquecida, sendo reconduzida à luz científica em 2015 por Donneys [35] e em 2018 por Xavier e Melo [36], para Edifícios Altos. Promoveu-se o completo resgate da TMC em 2019 por Melo em sua Tese, com a modelagem estática e dinâmica de pilares de pontes em paredes finas e contraventados por lintéis horizontais, conforme consta na Figura 7.

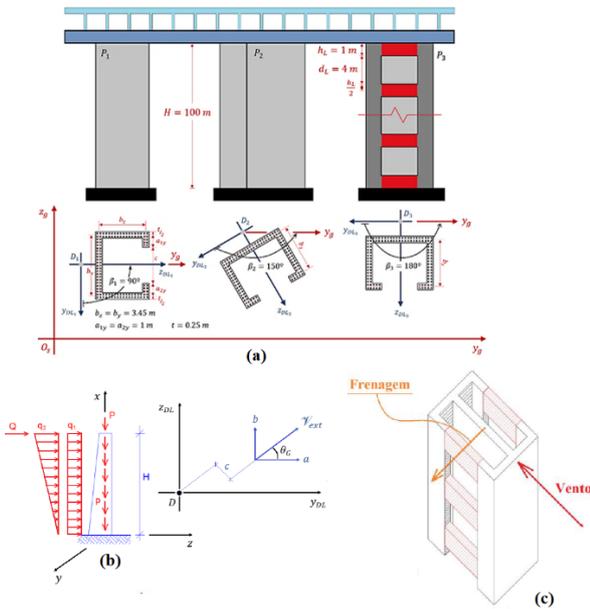


Figura 7: Pilares de paredes finas aplicados em pontes altas: (a) configuração generalizada; (b) carregamento do vento, esforço cortante no pilar; e (c) ações do vento e da frenagem de veículos em núcleos estruturais em duplo T (retirado de Melo [3]).

Os frutos da Tese mencionada no parágrafo anterior foram os artigos científicos: Melo e Barbosa [4–6], que fizeram uso da análise estática e dinâmica de pilares de paredes finas via TMC, e mais especificamente, valendo-se da “Teoria dos Painéis – Parede”.

2.2 Análise dinâmica dos painéis-parede

Para embasar as formulações dinâmicas do pilar de paredes finas modelado via TPP faz-se bastante relevante mencionar Chitty [37]; Vlassov & Terenine [38] e Vlassov [16], páginas 524 a 552, bem como, Rosman [39] e Laredo [40], nos quais se ressalta a possibilidade de expressar os modos de vibração mediante a solução da EDO (*Equação Diferencial Homogênea*) homogênea espacial. Por fim, para a ocorrência de um único *painel-parede* submetido à solicitação por flexão, considerando seção constante de paredes finas e material homo-gêneo, exprime-se:

- equação diferencial na análise estática:

$$EI \cdot \frac{d^2 \psi_x(z)}{dz^2} = \mathfrak{M}_y(z); \quad (1)$$

- equação diferencial na análise dinâmica:

$$EI \cdot \frac{d^4 \psi_x(z)}{dz^4} + m(z) \cdot \frac{d^2 \psi_x(z)}{dt^2} = 0; \text{ e} \quad (2)$$

- equação homogênea espacial:

$$\frac{d^4 Z}{dz^4} - \omega^2 \cdot \frac{m}{EI} \cdot Z = 0, \quad (3)$$

sendo: $\psi(z, t) = Z(z) \cdot T(t)$.

A solução da EDO homogênea espacial é expressa por:

$$Z(z) = C_1 \cdot \cosh(\alpha z) + C_2 \cdot \sinh(\alpha z) + C_3 \cdot \cos(\alpha z) + C_4 \cdot \sin(\alpha z), \quad (4)$$

cujas raiz é quantificada por:

$$\alpha = \sqrt[4]{\omega^2 \cdot \frac{m}{EI}}. \quad (5)$$

E, por último, os modos de vibração são obtidos mediante aplicação das condições de contorno ao serem inseridas na Equação (4). Considerando-se a base engastada e topo livre, conclui-se por equação transcendental:

$$\cosh(\alpha \cdot z) \cdot \cos(\alpha \cdot z) + 1 = 0, \quad (6)$$

em que ψ é a deflexão lateral ativada; \mathfrak{M} é o momento fletor; EI é a rigidez à flexão de \mathfrak{M} ;

z é a coordenada longitudinal; ω é a frequência natural; m é a massa; t é o tempo; além de $Z(z)$ e $T(t)$ serem soluções parciais no domínio espacial e temporal, respectivamente.

A resolução da Equação 6 implica em “ n ” modos de vibração, conforme consta na Figura 8 — os sete primeiros modos de vibração à flexão para os lintéis do sistema de contraventamento dos pilares em formato de núcleo estrutural.

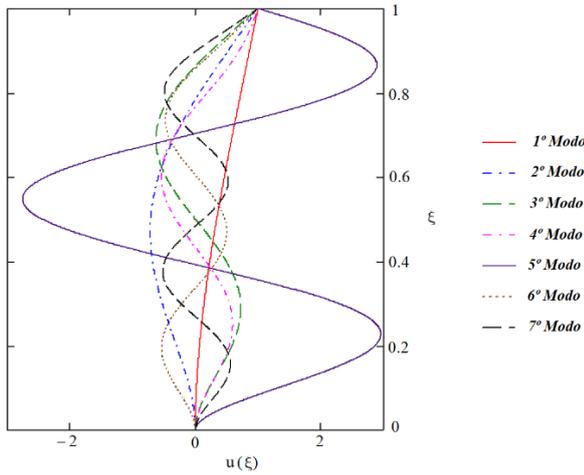


Figura 8: Sete primeiros modos de vibração à flexão dos lintéis do pilar de paredes finas com base engastada e topo livre.

2.2.1 Contraventamento em Z

Partindo dos conceitos de contraventamento em pórticos planos mediante lintéis inclinados cruzando os andares de Edifícios Altos, conforme se percebe em Pubal [41] e em Schueller [42], página 518, constata-se o contraventamento em Z como modelo de redistribuição das cargas laterais. E ainda, seguindo as formulações de Goto *et al.* [43]; Roberts e Yeung [44]; Zalka [45], páginas 218 a 230; e MacLeod [46], páginas 124 a 127, pode-se aplicar os conceitos do contraventamento em Z do pórtico plano. Veja ilustração na Figura 9, evidenciando-se os coeficientes elásticos da ligação dos lintéis com os painéis $(k_{V_i}^L; k_{H_i}^L; k_{T_i}^L; k_{V_f}^L; k_{H_f}^L; k_{T_f}^L)$.

2.2.2 Contraventamento em X

Agora, mais especificamente com aspectos pertinentes para a adequação da TMC/TPP para a modelagem estática e dinâmica de pilares de madeira, citam-se: Hashemi *et al.* [47] para a

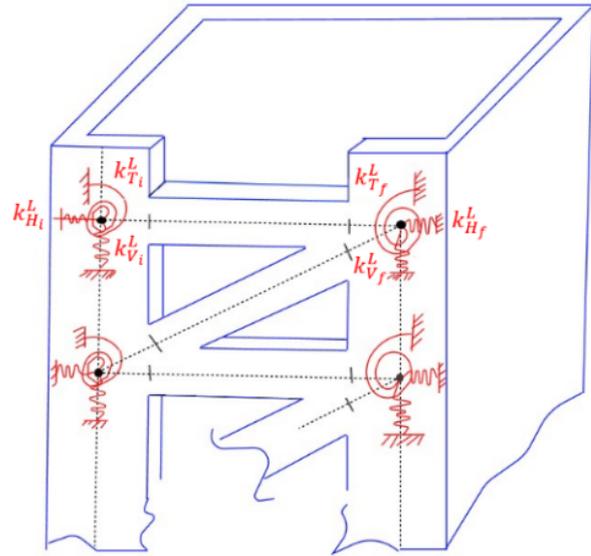


Figura 9: Contraventamento em Z e o sistema esquelito correspondente com apoio elástico nos pontos de encontro dos eixos, além de apoios elásticos no sistema plano de vinculação.

modelagem das ligações das peças de madeira a fim de compor os mencionados painéis-parede, além de recorrer a Ramage *et al.* [48] para justificar a disposição dos lintéis de contraventamento diagonais.

Sobre a análise estrutural das barras que compõem a modelagem da TPP, pode-se recorrer, a princípio, às teorias de Euler-Bernoulli ou de Timoshenko para expressar a deflexão lateral dos referidos painéis-parede. Essa última teoria considera a deformação por corte. Como textos científicos relevantes para a presente revisão citam-se: Rojas [49], Stephen [50] e Cowper [51]. Ao passo que, a relevância de investigar o grau de rigidez da vinculação dos lintéis horizontais nos painéis-parede foi inicialmente proposto em Michael [52] e Webster [53], sendo apontado para Núcleos Estruturais de Edifícios Altos em MacLeod [54], conforme consta na Figura 10.

Na aludida Figura 10 é evidenciado o Estado de Deformação do lintel horizontal com extremos elasticamente apoiados nos painéis-parede vizinhos. Para fins didáticos, procedeu-se apenas com a representação das translações nodais $(\delta_{V_i}; \delta_{H_i}; \delta_{V_f}; \delta_{H_f})$, sem os rotacionar.

Na análise dinâmica dos painéis-parede pode-se citar Laredo [40] para as primeiras análises processadas na Mecânica das Estruturas. Já em

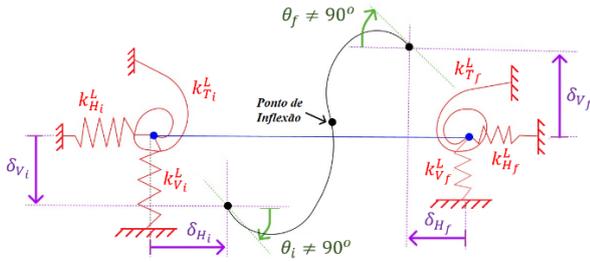


Figura 10: Vinculação elástica dos lintéis horizontais em contato com os painéis-parede.

termos específicos e voltado às edificações construídas em madeira, percebe-se a relevância a partir dos trabalhos de Alalwan e Larsson [55]; e Aristizabal-Ochoa [56].

2.2.3 Problema de flambagem

Na análise do problema de estabilidade elástica de pilares/barras referenciam-se, inicialmente, os artigos referentes à consideração da deformação por corte (Teoria de Timoshenko) e das grandes deformações, dos quais se elencam: [57], [58] e [59].

Além disso, para o estudo inicial da estabilidade em seções de paredes finas referencia-se Cheney [60], cujos avanços e enriquecimentos teóricos e experimentais são perceptíveis em: Whittle e Ramseyer [61], Ting *et al.* [62] e Roy *et al.* [63], além da mensuração da carga crítica em Hu *et al.* [64] para pilares de seção maciça atrelada aos efeitos de 2ª ordem e à Teoria de Timoshenko para representar matematicamente a deflexão lateral do eixo do pilar. Veja a modelagem do elemento diferencial do pilar na Figura 11, considerando-se a deformação por corte além dos efeitos de 2ª ordem, o que será incorporado também à TPP.

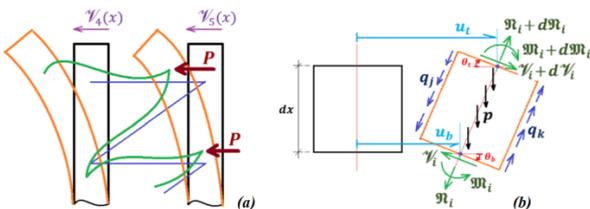


Figura 11: Contraventamento por lintéis: (a) carga lateral e esforços cortantes e (b) estado deformado do elemento diferencial do *i*-ésimo painel-parede.

2.3 Aplicação da TMC em pilares de pontes

Conforme é apresentado em Chitty [37], Laredo [40] e em Laier [65] a modelagem dinâmica de estruturas é convenientemente processada via TMC, ao considerar a rigidez dos elementos de conexão horizontais (lajes e vigas) como propriedades e solicitações distribuídas ao longo da edificação. Para os pilares, distribuem-se tais propriedades e solicitações ao longo da altura. Processa-se em Laier [65] a análise da vibração de paredes, preconizando no Brasil, o início das contribuições da TMC aplicada a problemas dinâmicos. Como se vê na Figura 12, a configuração de pilares em paredes finas foi utilizada na ponte ferroviária cujos vãos centrais foram levados pela onda de rejeitos de mineração, quando da ruptura da barragem de Brumadinho, em Minas Gerais.



Figura 12: Pilares de ponte férrea em duplo C associado por lintéis horizontais (retirado de Brumadinho [66]).

Outro exemplo de ponte férrea com pilares de seção de paredes finas é a ponte sobre o rio Olifants, sendo localizada na província Western Cape no sul da África (SA), com pilares em formato de duplo T e com abas variáveis na altura, conforme consta na Figura 13.



Figura 13: Pilares em duplo T: (a) visão panorâmica e (b) detalhe no pilar (retirado de Bussata e Moyo [67]).

Já a ponte de la Pyle, situada sobre o lago Vou-

glans na França, compreendida a oeste pela cidade de La Tour-du-Meix e a leste pela cidade Coyron, possui 65 metros de altura. Essa ponte é apresentada cientificamente em Courbon [68] e torna-se relevante mencionar nesta pesquisa por possuir pilares em duplo T com seção transversal constante, conforme consta na Figura 14.



Figura 14: Ponte de la Pyle na fase de construção, da qual se observa o pilar em duplo T com abas constantes (retirado de Pilar da ponte de la Pyle [69]).

O arranjo estrutural apresentado na Figura 12, pilar em duplo C e contraventado em conjunto por lintéis, é estudado por Marques [70]. Assim, em Melo e Barbosa [71] estudou-se a análise do pilar em duplo C com os lintéis contraventados de cada núcleo que compõe o pilar, mantendo-se a simetria do conjunto e fornecendo assim uma diretriz detalhada para projeto de tal elemento estrutural. Tal arranjo é apresentado na Figura 15.

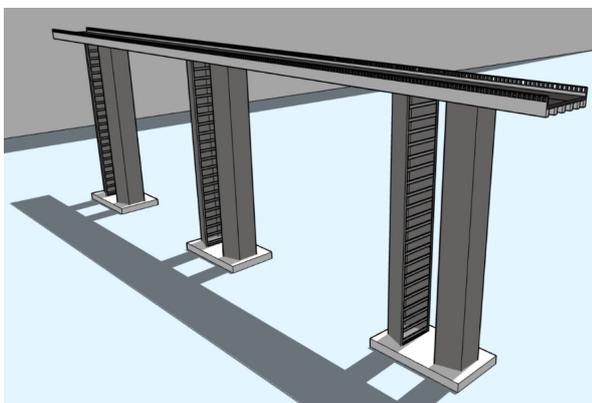


Figura 15: Ponte com pilares em duplo C contraventados individualmente por lintéis horizontais.

2.4 Estado de carga típico em pilar de ponte

A vibração lateral é potencializada pela ação do vento. Para tal carregamento, adota-se a atuação combinada de carga constante na altura q_1 da carga distribuída linearmente na edificação, com valor máximo de q_2 no topo do pilar e a carga Q concentrada no topo da estrutura em análise. Essa última carga tem a finalidade de representar a atuação do vento no tabuleiro da ponte (no caso da análise dos pilares). Essa representação das cargas é embasada em Solnes e Sigbjornsson [72] e exposta em Melo e Barbosa [6] com o perfil de velocidade do vento crescente ao longo da altura, bem como no fato do carregamento lateral ser preenchido do topo em direção à base do pilar, na medida em que a corrente de ar se aproxima do obstáculo. No caso, o pilar é apresentado em Koten [73] e a mencionada aplicação de três carregamentos laterais q_1 , q_2 e Q é ilustrada na Figura 16 (b).

2.4.1 Esforço cortante externo

Na Figura 16, ilustra-se o esquema de quantificação do esforço cortante externo \mathcal{V}_{ext} em relação ao i -ésimo painel-parede, bem como sua correlação com os carregamentos q_1^* , q_2^* e Q na direção principal, além de evidenciar o translade entre o Centro de Gravidade (CG) e o Centro de Carga (CC).

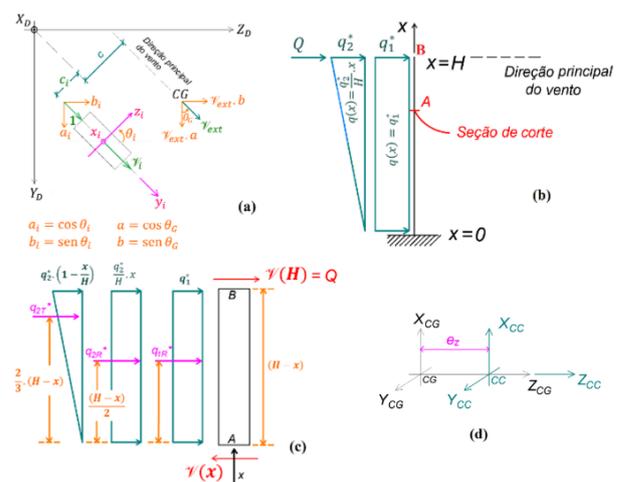


Figura 16: Ação do vento: (a) direção principal; (b) carregamentos; (c) equilíbrio de cortantes; e (d) braço de alavanca entre o centro de carga e o centro de gravidade.

Em primeira análise determina-se o \mathcal{V}_{ext} por

meio do equilíbrio de forças horizontais no trecho AB apresentado na Figura 16 (c). Assim, exprime-se:

$$\mathcal{V}_{\text{ext}} = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3. \quad (7)$$

Em segunda análise, procede-se o equilíbrio de esforços cortantes externos com o cortante \mathcal{V}_i , por meio da Figura 16 (a), da qual se escrevem:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \cdot a_i = \mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot a, \quad (8a)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \cdot b_i = \mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot b \quad e \quad (8b)$$

$$G\phi' \cdot \left(\sum_{i=1}^n I_{t_i} \right) + \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \cdot c_i = \mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot c. \quad (8c)$$

Por fim, aplicando as Equações (8) na geometria do núcleo estrutural apresentado na Figura 8, conclui-se o seguinte:

$$\mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot a = \mathcal{V}_1 \cdot a_1 + \mathcal{V}_2 \cdot a_2 + \mathcal{V}_3 \cdot a_3 + \mathcal{V}_4 \cdot a_4 + \mathcal{V}_5 \cdot a_5, \quad (9a)$$

$$\mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot b = \mathcal{V}_1 \cdot b_1 + \mathcal{V}_2 \cdot b_2 + \mathcal{V}_3 \cdot b_3 + \mathcal{V}_4 \cdot b_4 + \mathcal{V}_5 \cdot b_5 \quad e \quad (9b)$$

$$\mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot c = \sum_{i=1}^{n=5} (\mathcal{V}_i \cdot c_i) + G \cdot \left(\sum_{i=1}^n I_{t_i} \right) z \cdot \phi'. \quad (9c)$$

Logo, matricialmente, tem-se:

$$\mathcal{V}_{\text{ext}} \cdot \{\mathbf{A}^*\} = [\mathbf{M}_9]^T \cdot \{\mathcal{V}_\omega\} + [\mathbf{M}_{11}] \cdot \{\mathcal{V}'\}, \quad (10)$$

com

$$[\mathbf{M}_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot \left(\sum_{i=1}^n I_{t_i} \right) \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\{\mathbf{A}^*\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \theta_G \\ \text{sen } \theta_G \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (12)$$

e

$$I_{t_i} = \frac{2 \cdot d_i \cdot t^3}{3}, \quad (13)$$

sendo que e_z é a distância entre o CG e o CC, valendo $e_z = b_2/2 - b_{CGz}$; d_i é o comprimento

da seção transversal do i -ésimo painel-parede; t é a espessura da seção transversal do i -ésimo painel-parede; e $\{G \cdot I_{t_i}\}$ é a rigidez à torção do i -ésimo painel-parede.

2.5 Sequência lógica para o estudo da TMC

Aos futuros pesquisadores que almejam se aprofundar na TMC, é recomendável o estudo das seguintes publicações e obviamente toda a literatura nelas citada:

Em Portland [74], estuda-se o pórtico plano e os lintéis com trechos variáveis, bem como, a rigidez do nó de pórtico. Enquanto Burns [75] analisa a associação de paredes corte por meio de lintéis horizontais, vem Coull e Choudhury [76] e incrementam a carga lateral triangular e a concentrada no topo. Acompanhando a mesma análise de associação, cita-se Davidovici [77], Ailwathi [78], este pela rotulação dos lintéis sempre ao meio do vão, enquanto Gluck e Gellert [79] enriquecem a abordagem com o estudo da associação de pilares com paredes corte por meio de lintéis horizontais e da análise de pórticos planos via TMC e, principalmente, ao elencar as condições de contorno.

Já no estudo dos lintéis, podem ser evidenciados: Coin *et al.* [80], com a computação das reações elásticas dos lintéis, além do equilíbrio nodal das ligações dos pilares com os aludidos lintéis; Borges e Ravara [81] expondo os trechos dos lintéis com rigidez à flexão tida como infinita e definida entre o ponto de ligação do lintel até o eixo dos painéis-parede (paredes de corte); e, por decorrência, deve-se complementar a leitura com Goyal e Sharma [82] ao apresentar a equação de compatibilidade e matriz de transferência para que os pontos citados não estejam alinhados na horizontal.

Na resolução do sistema de equações diferenciais pode-se recorrer à generalização de sistema coordenado proposta em Courbon [83]. Em seguida, o estudo da publicação [84] acrescenta os lintéis em X contraventando paredes de corte ou pilares. Para a associação de múltiplas paredes de corte deve-se iniciar o levantamento por Martins [85]. É possível analisar uma única linha de

ação do vento, por direção, através da união fictícia de todos os elementos resistentes por meio de trens de ligação, conforme é apresentado em Coull e Subedi [86]. Ou ainda, recorrendo-se a Despeyroux [87], estuda-se: fluxo de cisalhamento nas interseções e ligações dos painéis-parede (parede de corte); associação de paredes de corte via lintéis; edificação com lintéis distintos por seção, ao longo da altura; e pilares em formato de X, de V, e L invertido suportando associação múltipla de paredes de corte por lintéis horizontais. Já em Lener [88] é apresentado como utilizar os ábacos postulados via TMC e em Cowper [51] como integrar a teoria de Timoshenko na TPP.

Por decorrência, a análise de cargas críticas é recorrível em Kordecki [89] e em Giangreco [90]. Nesse último, diferenciando a análise para vigas de paredes finas aberta. E no aprofundamento da teoria de paredes finas, deve-se recorrer a Vlassov [16], Calgaro [91], Mori e Munaiar Neto [92], além de Melo [3], de Melo e Barbosa [4–6, 93] de Melo, Luz e Barbosa [7], de Melo *et al.* [7], de Alsheikh e Rees [94] e de Makarios e Athanatopoulou [95].

Por fim, pode-se observar a evolução da TPP para a generalização da inclinação das paredes componentes dos núcleos C e duplo T, a qual está exposta em Melo e Barbosa [71] com título de Generalização da Teoria dos Painéis-Parede (GTPP). O referido evento também é corroborado nos avanços de Melo [6], e em Murawski [96] para embasar a análise da carga crítica nas paredes finas.

3. ESTADO DA ARTE DO MEF-EB

A análise estática dos pilares via MEF unidimensional, ou seja, o MEF-EB, é procedida por meio do sistema de equilíbrio clássico $\{P\} = [k] \cdot \{d\}$, do qual se pode adotar a nomenclatura de Maney [10] e de Parcel e Maney [97] e se reescrever-se no sistema de coordenadas de cada (EF-B) elemento finito de barra, como:

$$\{R_e\} = [k_e] \cdot \{d\} + \{R_e^F\}. \quad (14)$$

Na Figura 17 é apresentado o EF-B para o pilar de paredes finas, em seção sob formato de duplo

T, dispondo, para tal, os Graus de Liberdade no sistema local de coordenadas. E pode-se recorrer a Reddy [98] para obter a matriz de massa do EF e proceder à análise dinâmica pelo MEF de barra.

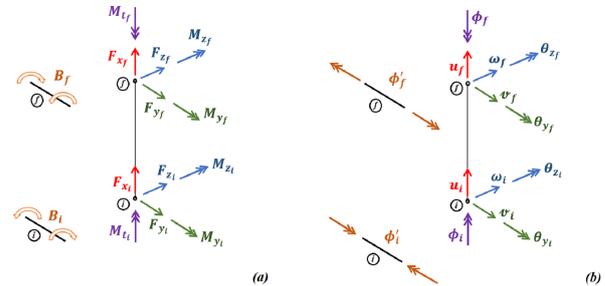


Figura 17: Elemento finito unidimensional do pilar de paredes finas: (a) convenção positiva de esforços solicitantes nos extremos do EF; e (b) graus de liberdade.

Muitas foram as publicações que incrementaram o conhecimento apresentado em Heidebrecht e Swift [99], seja por melhorá-lo ou por explicar com riqueza de detalhes o equacionamento procedido. Em Barbosa [25] e em Smith e Coull [100] é verificada a explicação das etapas do equacionamento procedido por Heidebrecht e Swift [99]. Porém, todos para matrizes de rigidez sem considerar a deformação por corte.

A partir de Barbosa [25], pode-se elencar as seguintes etapas para a escrita da matriz de rigidez do elemento finito “novo” de pilar de parede fina em formato C contraventado por lintéis: (i) definir os elementos da matriz de rigidez do pilar de paredes finas, já considerando o empenamento e o bimomento; (ii) definir a matriz de rigidez dos lintéis; (iii) compatibilizar as matrizes das etapas (i) e (ii); e (iv) unificar, adequadamente, as matrizes compatibilizadas em (iii).

Já a modelagem do núcleo C enrijecido no topo por treliça espacial, procedida pela TMC na Livre Docência [33], foi inicialmente resolvida pelo elemento finito em Yoshida [101]. Tal geometria é relembrada pela Figura 6 (c).

Ademais, a consideração da deformação por corte nas matrizes de rigidez foi processada em Melo [3].

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo foi possível percorrer a evolução histórica da aplicação da TMC e delimitar o seu Estado da Arte, nas mais variadas configurações de estruturas e de sistemas de contraventamento por lintéis. Ressalva-se a baixa quantidade de publicações que ocorreu após segunda metade da década de 1990, resgatada em sua plenitude por Melo [3] e nas publicações subsequentes [4–7, 71, 93].

Ademais, foi estabelecida uma sequência lógica de estudos para os futuros pesquisadores que almejam se especializar na TMC, cuja robustez é atrativa e exequível, desde que a estrutura possa ser equiparada a meio de propriedades, solicitações e ações homogeneizadas.

Quanto ao MEF-EB, foi enunciada a ideia basilar da propositura e listaram-se publicações com EF destinados à modelagem discretizada dos pilares de paredes finas já contraventados. No caso do elemento finito, viu-se também a evolução histórica e definiu-se o atual estado de pesquisas no MEF-EB (item 3), delimitando, assim, o Estado da Arte para a análise por MEF nos citados pilares.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao financiamento do Projeto Institucional da UFRPE com cotas da FACEPE para Bolsas de Incentivo Acadêmico (Edital 27/2021 – BIA 2022) destinado ao primeiro autor deste artigo. Os autores também agradecem aos bons préstimos da biblioteca do CT-UFRJ por ceder acesso os PDFs das publicações [8, 75], bem como, da divisão da biblioteca de EPUSP pela cortesia dos arquivos dos trabalhos [83, 84] e fornecimento de índices de livros e revistas técnicas. Esses auxílios incentivaram a manutenção da excelência acadêmica.

REFERÊNCIAS

1. ROSMAN, R. Application of variational methods in the theory of tall building structures. In: *Proceedings of international conference on variational methods in engineering*. England:

[s.n.], 1972. EDA 006, p. 11/68–11/83.

2. MALEKINEJAD, Mohsen; RAHGOZAR, Reza. A simple analytic method for computing the natural frequencies and mode shapes of tall buildings. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier BV, v. 36, n. 8, p. 3419–3432, ago. 2012. ISSN 0307-904X. doi: [10.1016/j.apm.2011.10.018](https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.10.018).

3. MELO, W. I. G. *Contribuições à análise dinâmica da ação do vento em Pilares de Pontes via Técnica do Meio Contínuo e Método dos Elementos Finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19805>.

4. MELO, W. I. G.; BARBOSA, N. P. Pilares de pontes com seção de paredes finas e elevada altura, uma análise teórica e numérica pela técnica do meio contínuo e pelo método dos elementos finitos. *REUCP*, v. 14, n. 1, p. 25–45, 2020. Disponível em: <https://seer.ucp.br/seer/index.php/REVCEC/article/view/1840>.

5. MELO, Wesley Imperiano Gomes de; BARBOSA, Normando Perazzo. Dynamic decoupling in reinforced concrete columns in structural core shape and applied to bridges. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*, AI Publications, v. 7, n. 5, p. 48–58, 2020. ISSN 2456-1908. doi: [10.22161/ijaers.75.7](https://doi.org/10.22161/ijaers.75.7).

6. MELO, Wesley Imperiano Gomes de; BARBOSA, Normando Perazzo. Dynamic modeling of metal columns with open thin-walled sections. *International Journal of Steel Structures*, Springer Science and Business Media LLC, v. 20, n. 3, p. 833–855, mar. 2020. ISSN 2093-6311. doi: [10.1007/s13296-020-00326-4](https://doi.org/10.1007/s13296-020-00326-4).

7. MELO, W. I. G.; LUZ, P. V. C. A.; BARBOSA, N. P. Dynamic modeling of thinwalled slender columns braced by lintels in systems Z and X. *REUCP*, v. 15, n. 1, p. 36–56, 2021. Disponível em: <https://seer.ucp.br/seer/index.php/REVCEC/article/view/2043>.

8. BECK, H. Contribution to the analysis of coupled shear walls. *Journal of the American con-*

- crete institute*, v. 59, n. 8, p. 1055–1070, 1962. doi: [10.14359/7951](https://doi.org/10.14359/7951).
9. MARNEFFE, A. Calcul direct de la poutre vierendeel par la méthode des systèmes équivalentes. *IABSE publications*, n. 5, 1937. Accessed: 21 Mar 2023. Disponível em: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=bse-me-001%3A1937-1938%3A5%3A%3A271&referrer=search#271>.
10. MANEY, G A. *Secondary stresses and other problems in rigid frames: a new method of solution*. Minneapolis: University of Minnesota, 1915. 1–17 p. (Studies in Engineering. Bulletin 1).
11. GOLDBERG, John E. Wind stresses by slope deflection and converging approximations. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, American Society of Civil Engineers (ASCE), New York, v. 99, n. 1, p. 962–984, jan. 1934. ISSN 2690-4071. doi: [10.1061/taceat.0004526](https://doi.org/10.1061/taceat.0004526).
12. MACLEOD, I. A. Lateral stiffness of shear walls with openings. In: COULL, A; SMITH, B S (Ed.). *Tall Buildings: The Proceedings of a Symposium*. [S.l.]: Elsevier, 1967. p. 223–244. doi: [10.1016/b978-0-08-011692-1.50016-x](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-011692-1.50016-x).
13. VARJÚ, György; PROKIÉ, Aleksandar. The influence of lintel beams and floor slabs on natural frequencies of the tall buildings core - numerical and experimental studies. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, Periodica Polytechnica Budapest University of Technology and Economics, v. 59, n. 4, p. 511–520, 2015. ISSN 1587-3773. doi: [10.3311/ppci.8410](https://doi.org/10.3311/ppci.8410).
14. RICALDONI, J. *Curso de estructuras metálicas: Naves Metálicas*. Montevideo: Publicaciones del Instituto de Estática, 1961. II. (Tomo II. Volumen I, Nº 19).
15. RICALDONI, J. *Nota sobre el Efecto de Torsion em Edificios Elevados*. Nº 16. Montevideo: Publicaciones del Instituto de Estática, 1958.
16. VLASSOV, B. Z. *Pièces longues em voiles minces*. Paris: Éditions Eyrolles, 1962.
17. BACH, C.; BAUMANN, R. *Elastizität und Festigkeit*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1909. 369–381 & 268–271 p. doi: [10.1007/978-3-662-25894-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-25894-1). ISBN 978-3662258941.
18. BERNSTEIN, S. A. Etude expérimentale de la membrure supérieure d’une poutre maîtresse d’un point. Contraintes et Déformations das les Ponts sous charges statiques. *Fasc*, n. 60, 1927.
19. BLEICH, F.; BLEICH, H. Biegung, drellung und knickung von stäben aus dunen wänden. *Vorbericht Zweiter Kongress Internationale Vereinigung für Brüickenbau und Hochbau*, Berlin, Oktober 1936.
20. VLASSOV, B. Z. *Enveloppes dans la statique des constructions*. [S.l.]: ONTI, 1936.
21. VLASSOV, B. Z. *Pièces longues em voiles minces*. [S.l.]: Stroiisdat, 1940.
22. VLASSOV, B. Z. *La statique des constructions spatiales em voiles minces*. [S.l.]: Gosstrois-dast, 1949.
23. VLASSOV, B. Z. *Théorie Générale des Voiles*. [S.l.]: Gosstroisidast, 1949.
24. MANCINI, E. *Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamentos elásticos*. Dissertação (Mestrado) — EESC, São Carlos, SP, 1972. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/564>.
25. BARBOSA, J. A. *Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis sob carga lateral*. Dissertação (Mestrado) — EESC, São Carlos, SP, 1978. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/591>.
26. RICALDONI, J. *Estructuras de Edificios Elevados, Nº 18*. Montevideo: Publicaciones del Instituto de Estática, 1959.
27. STAMATO, M. C.; SMITH, B. S. An approximate method for the three dimensional analysis of tall buildings. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Thomas Telford Ltd., v. 43, n. 3, p. 361–379, jul. 1969. ISSN 1753-7789. doi: [10.1680/iicep.1969.7331](https://doi.org/10.1680/iicep.1969.7331).
28. STAMATO, M. C. *Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento*. São Carlos, SP: EESC/USP, 1966. Disponível

em: <http://repositorio.eesc.usp.br/items/67cd702b-6202-49e4-8ce5-4ac1aaed9406>.

29. STAMATO, M. C. *Associação contínua de painéis de contraventamento*. São Carlos: EESC/USP, 1971.

30. MANCINI, E. *Análise contínua de estruturas de Edifícios Elevados sujeitas à ação do vento*. Tese (Doutorado) — EESC, São Carlos, SP, 1973. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/568>.

31. CARVALHO, F. A. C. *Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis*. Dissertação (Mestrado) — EESC, São Carlos, SP, 1980. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/610>.

32. STAMATO, M. C. *Determinação dos esforços nas barras elásticas que vinculam um corpo rígido*. Tese (Livre docência) — EESC/USP, São Carlos, SP, 1964.

33. MANCINI, E. *Aplicação da Técnica do Meio Contínuo a problemas relativos a estruturas de Edifícios Altos*. Tese (Livre docência) — EESC, São Carlos, SP, 1995.

34. MANCINI, Eddie; SAVASSI, Walter. Tall building structures unified plane panels behaviour. *The Structural Design of Tall Buildings*, Wiley, v. 8, n. 2, p. 155–170, jun. 1999. ISSN 1099-1794. doi: [10.1002/\(sici\)1099-1794\(199906\)8:2<155::aid-tal125>3.0.co;2-6](https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1794(199906)8:2<155::aid-tal125>3.0.co;2-6).

35. DONEYYS, C. A. O. *Análise de estruturas de edifício alto submetidas a carregamento sísmico pela técnica do meio contínuo*. Dissertação (Mestrado) — EESC, São Carlos, SP, 2015. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/1111>.

36. XAVIER, M. A. P.; MELO, W. I. G. Análise de efeitos de segunda ordem em núcleo estrutural de seção aberta sem e com contraventamento. In: _____. *Engenharia Civil: Temas, Técnicas e Aplicações*. [s.n.], 2018. III, cap. 27, p. 432–442. Disponível em: <https://books.unipe.edu.br/meioambiente/issue/view/29/27>.

37. CHITTY, L. On the cantilever composed of a number of parallel beams interconnected by

cross bars. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 38, p. 685–699, 1947. doi: [10.1080/14786444708521646](https://doi.org/10.1080/14786444708521646).

38. VLASSOV, B. Z.; TERENCE, B. M. *Vibrations des enveloppes prismatiques et cylindriques. Etudes sur la Dynamique des Constructions*. [S.l.]: Stroiisdat, 1947. doi: [10.1680/iicep.1973.4875](https://doi.org/10.1680/iicep.1973.4875).

39. ROSMAN, R. Dynamics and stability of shear wall building structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Thomas Telford Ltd., v. 55, n. 2, p. 411–423, jun. 1973. ISSN 1753-7789. doi: [10.1680/iicep.1973.4875](https://doi.org/10.1680/iicep.1973.4875).

40. LAREDO, M. *Grands Batiments: Contre-ventements, Dynamique des Structures & Calcul Automatique*. Paris: Éditions Eyrolles, 1977.

41. PUBAL, Z. *Theory and Calculation of Frame Structures with stiffening Walls*. Amsterdam: Elsevier, 1988. v. 22. (Developments in Civil Engineering, v. 22).

42. SCHUELLER, W. *The Vertical Building Structure*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

43. GOTO, Yoshiaki; EBISAWA, Takemasa; LU, Xilin; LU, Wensheng. Ultimate state of thin-walled circular steel columns subjected to biaxial horizontal forces and biaxial bending moments caused by bidirectional seismic accelerations. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 141, n. 5, p. 04014122(1–12), abr. 2015. ISSN 1943-541X. doi: [10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0001067](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0001067).

44. ROBERTS, T. M.; YEUNG, K. W. Torsion and bending of braced thin-walled open sections. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier BV, v. 34, n. 5, p. 333–344, maio 1992. ISSN 0020-7403. doi: [10.1016/0020-7403\(92\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90021-8).

45. ZALKA, Karoly. *Global Structural Analysis of Buildings*. New York: Taylor & Francis Group, 2000. doi: [10.4324/9780203184295](https://doi.org/10.4324/9780203184295). ISBN 9780203184295.

46. MACLEOD, I A. *Analytical Modelling of Structural Systems: an entirely new approach with emphasis on the behaviour of building structures*. New York: Ellis Horwood, 1990.
47. HASHEMI, Ashkan; MASOUDNIA, Reza; QUENNEVILLE, Pierre. A numerical study of coupled timber walls with slip friction damping devices. *Construction and Building Materials*, Elsevier BV, v. 121, p. 373–385, set. 2016. ISSN 0950-0618. doi: [10.1016/j.conbuildmat.2016.05.160](https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.05.160).
48. RAMAGE, Michael; FOSTER, Robert; SMITH, Simon; FLANAGAN, Kevin; BAKER, Ron. Super tall timber: design research for the next generation of natural structure. *The Journal of Architecture*, Informa UK Limited, v. 22, n. 1, p. 104–122, jan. 2017. ISSN 1466-4410. doi: [10.1080/13602365.2016.1276094](https://doi.org/10.1080/13602365.2016.1276094).
49. ROJAS, A. L. Method of structural analysis for statically indeterminate beams. *ICIC International*, v. 8, 2012. Disponível em: <http://www.ijicic.org/ijicic-11-04076.pdf>.
50. STEPHEN, N. G. Timoshenko's shear coefficient from a beam subjected to gravity loading. *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 47, n. 1, p. 121–127, mar. 1980. ISSN 1528-9036. doi: [10.1115/1.3153589](https://doi.org/10.1115/1.3153589).
51. COWPER, G. R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 33, n. 2, p. 335–340, June 1966. ISSN 1528-9036. doi: [10.1115/1.3625046](https://doi.org/10.1115/1.3625046).
52. MICHAEL, D. The effect of local wall deformations on the elastic interaction of cross walls coupled by beams. In: UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON. *Tall Buildings*. [S.l.]: Elsevier, 1966. p. 253–270. doi: [10.1016/b978-0-08-011692-1.50017-1](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-011692-1.50017-1).
53. WEBSTER, J A. The static and dynamic analysis of orthogonal structures composed of shear walls and frames. In: UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON. *Tall Buildings*. [S.l.]: Elsevier, 1966. p. 377–395. doi: [10.1016/b978-0-08-011692-1.50022-5](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-011692-1.50022-5).
54. MACLEOD, I A. General frame element for shear wall analysis. *Proc. Inst. Civ. Enginrs, Part 2*, v. 61, p. 785–790, 1976. doi: [10.1680/jicep.1976.3345](https://doi.org/10.1680/jicep.1976.3345).
55. ALALWAN, A.; LARSSON, J. *Stability and dynamic properties of tall timber structures*. Dissertação (Mestrado) — Gothenburg, Sweden, 2019. Disponível em: <https://odr.chalmers.se/items/f771a70e-4346-454a-9dff-5d709c07329d>.
56. XING, Hailing; XUE, Songtao; ZONG, Gang. Dynamic properties of conventional beam-column timber structure under successive damage. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, Informa UK Limited, v. 10, n. 1, p. 195–202, maio 2011. ISSN 1347-2852. doi: [10.3130/jaabe.10.195](https://doi.org/10.3130/jaabe.10.195).
57. ARISTIZABAL-OCHOA, J. Darío. Second-order slope-deflection equations for imperfect beam-column structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, Elsevier BV, v. 32, n. 8, p. 2440–2454, ago. 2010. ISSN 0141-0296. doi: [10.1016/j.engstruct.2010.04.018](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.04.018).
58. BANERJEE, A.; BHATTACHARYA, B.; MALLIK, A. K. Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier BV, v. 43, n. 5, p. 366–376, jun. 2008. ISSN 0020-7462. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2007.12.020](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.12.020).
59. CHEN, Li. An integral approach for large deflection cantilever beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier BV, v. 45, n. 3, p. 301–305, abr. 2010. ISSN 0020-7462. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004).
60. CHENEY, James A. Bending and buckling of thin-walled open-section rings. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 89, n. 5, p. 17–44, out. 1963. ISSN 2690-2427. doi: [10.1061/jmcea3.0000417](https://doi.org/10.1061/jmcea3.0000417).
61. WHITTLE, Jessica; RAMSEYER, Chris. Buckling capacities of axially loaded, cold-formed, built-up c-channels. *Thin-Walled Structures*, Elsevier BV, v. 47, n. 2,

- p. 190–201, fev. 2009. ISSN 0263-8231. doi: [10.1016/j.tws.2008.05.014](https://doi.org/10.1016/j.tws.2008.05.014).
62. TING, Tina Chui Huon; ROY, Krishanu; LAU, Hieng Ho; LIM, James B. P. Effect of screw spacing on behavior of axially loaded back-to-back cold-formed steel built-up channel sections. *Advances in Structural Engineering*, SAGE Publications, v. 21, n. 3, p. 474–487, jul. 2017. ISSN 2048-4011. doi: [10.1177/1369433217719986](https://doi.org/10.1177/1369433217719986).
63. ROY, Krishanu; TING, Tina Chui Huon; LAU, Hieng Ho; LIM, James B. P. Experimental and numerical investigations on the axial capacity of cold-formed steel built-up box sections. *Journal of Constructional Steel Research*, Elsevier BV, v. 160, p. 411–427, set. 2019. ISSN 0143-974X. doi: [10.1016/j.jcsr.2019.05.038](https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2019.05.038).
64. HU, Z-P.; PAN, W-H.; TONG, J-Z. Exact solutions buckling and second-order effect of shear deformable Timoshenko beam-columns based on matrix structural analysis. *Applied sciences*, v. 9, n. 3814, p. 1–12, 2019. doi: [10.3390/app9183814](https://doi.org/10.3390/app9183814).
65. LAIER, J. E. *Estudo do comportamento dinâmico de estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo*. Tese (Livre docência) — EESC/USP, São Carlos, SP, 1984.
66. BRUMADINHO. 2019. Accessed on 23/08/2019. Disponível em: <https://vejasp.abril.com.br/cidades/alarme-buscasinterrompidas-brumadinho/>.
67. BUSATTA, Fulvio; MOYO, Pilate. Vibration monitoring of a large scale heavy haul railway viaduct. In: FELTRIN, G. (Ed.). *MATEC Web of Conferences*. [S.l.]: EDP Sciences, 2015. v. 24, p. 04007. ISSN 2261-236X. doi: [10.1051/mateconf/20152404007](https://doi.org/10.1051/mateconf/20152404007).
68. COURBON, J. Le pont de la Pyle. *Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics*, Paris, n. 252, p. 1865–1882, December 1968.
69. PILAR da ponte de la Pyle. 2019. Accessed on 16/09/2019. Disponível em: https://farm4.static.flickr.com/3036/2549091566_4caf44c672_b.jpg.
70. MARQUES, J. C. M. *Estruturas tubulares de edifícios altos submetidas à torção*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1983. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/642>.
71. MELO, W. I. G.; BARBOSA, N. P. Generalization of the wall panel theory applied to structural cores C and double T. *International Journal of Multidisciplinary Sciences and Engineering*, v. 12, n. 3, p. 1–10, 2021. Disponível em: https://www.ijmse.org/Volume12/Issue3/paper1_12_3.pdf.
72. SOLNES, Julius; SIGBJÖRNSSON, Ragnar. Along-wind response of large bluff buildings. *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 99, n. 3, p. 381–397, mar. 1973. ISSN 2690-3377. doi: [10.1061/jsdeag.0003456](https://doi.org/10.1061/jsdeag.0003456).
73. KOTEN, H. Wind measurements of high buildings in the netherlands. In: *International research seminar winds effects on buildings and structures*. Ottawa: [s.n.], 1967. I. Disponível em: https://www.aivc.org/sites/default/files/airbase_391.pdf.
74. PORTLAND CEMENT ASSOCIATION. *Continuity in concrete building frames*. Montevideo: PCA, 1935. Disponível em: <https://archive.org/details/ContinuityInConcreteBuildingFrames/page/n13/mode/2up>.
75. BURNS, R. J. An approximate method of analysing coupled shear walls subject to triangular loading. *Building science*, v. 7, p. 249–256, 1972. doi: [10.1016/0007-3628\(72\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0007-3628(72)90006-0).
76. COULL, A.; CHOUDHURY, J. R. Analysis of coupled shear walls. *ACI Journal*, v. 64, p. 587–593, 1967. doi: [10.14359/7588](https://doi.org/10.14359/7588).
77. DAVIDOVICI, V. E. Effets des variations linéaires dans les batiments de grande hauteur. *Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics*, Paris, n. 237, p. 1252–1275, September 1967.
78. AILAWADHI, R K. *Analysis of shear walls in tall buildings*. Dissertação (Mestrado) — Col-

lege of the Oklahoma, 1970. Disponível em: <https://hdl.handle.net/11244/25602>.

79. CLUCK, J.; GELLERT, M. A continuous method for structural analysis of multistory buildings. *IABSE publications*, v. 31, p. 39–49, 1971. Disponível em: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?lang=en&pid=bse-me-001%3A1971%3A31%3A%3A78#78>.

80. COIN, A; DECAUCHY, A; COOLIGNON, A M. Murs de contreventement a ouvertures multiples. *Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics*, Paris, n. 132, p. 58–75, February 1971.

81. BORGES, J. F.; RAVARA, A. Estudo do comportamento de estruturas de edifícios sob ação de forças horizontais. In: *2ª Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Estruturas*. [S.l.: s.n.], 1967. p. 1–30.

82. GOYAL, B. K.; SHARMA, S. P. Matrix analysis of frames with shear walls. *Building Science*, Elsevier BV, v. 3, n. 2, p. 93–98, nov. 1968. ISSN 0007-3628. doi: [10.1016/0007-3628\(68\)90019-4](https://doi.org/10.1016/0007-3628(68)90019-4).

83. COURBON, J. Calcul de l'effet du vent sur um batimento mixte. *Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics*, Paris, n. 226, p. 1186–1197, October 1966.

84. FRANCO, M. *Alguns problemas relativos à ação do vento em edifícios de grande altura*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da USP, São Paulo, 1966.

85. MARTINS, J. B. Métodos de cálculo e resultados de ensaio em modelo reduzido para um edifício de grande altura. In: *3ª Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Estruturas*. [S.l.: s.n.], 1971. VII, n. 18.

86. COULL, A; SUBEDI, N K. Hull-core structures subjected to bending and torsion. In: *IABSE publications*. [s.n.], 1972. v. 9, p. 613–622. Disponível em: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=bse-cr-001:1972:9::123>.

87. DESPEYROUX, J. Analyse statique et dynamique des contreventements par consoles élémentaires solidarizadas par des milieux élastiques.

Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics, Paris, n. 147, p. 42–111, February 1972.

88. LERNER, E. Abaques pour la détermination de l'inertie des refends avec des ouvertures de moyennes dimensions. *Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics*, Paris, n. 226, p. 1142–1144, October 1966.

89. KORDECKI, Z. Flambement des barres comprimées par une force de courte durée. *Annales de l'institut technique du batimento et des travaux publics*, Paris, n. 225, p. 1046–1052, September 1966.

90. GRIANGRECO, E. Static and stability of thin walled beams. *IABSE publications*, v. 26, p. 139–168, 1966.

91. CALGARO, J-A. *Poutres à parois minces: Étude du cisaillement*. Paris: Hermes, 1998.

92. MORI, D. D.; NETO, J. Munaiar. *Flexo torção: barras com seção aberta e paredes delgadas – Teoria e Exemplos*. São Carlos: EESC/USP, 2017.

93. MELO, Wesley Imperiano Gomes de; BARBOSA, Normando Perazzo. New bar finite element for modeling massive columns with linearly variable rectangular section. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*, AI Publications, v. 7, n. 5, p. 1–10, 2020. ISSN 2456-1908. doi: [10.22161/ijaers.75.8](https://doi.org/10.22161/ijaers.75.8).

94. ALSHEIKH, Abdelraouf M. Sami; REES, D. W. A. General stiffness matrix for a thin-walled, open-section beam structure. *World Journal of Mechanics*, Scientific Research Publishing, Inc., v. 11, n. 11, p. 205–236, 2021. ISSN 2160-0503. doi: [10.4236/wjm.2021.1111015](https://doi.org/10.4236/wjm.2021.1111015).

95. MAKARIOS, Triantafyllos K.; ATHANATOPOULOU, Asimina. Center of stiffness, principal axes and principal start point of thin-walled open-sections of cores: A new modified calculation technique based on vlasov torsion theory. *Buildings*, MDPI AG, v. 12, n. 1804, p. (1–27), out. 2022. ISSN 2075-5309. doi: [10.3390/buildings12111804](https://doi.org/10.3390/buildings12111804).

96. MURAWSHI, K. Technical buckling, stress and strain simplified analysis of semi-slender thin-walled cylindrical pinned column. *International Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research*, v. 5, p. 134–194, 2021. doi: [10.3844/sgamrsp.2021.134.194](https://doi.org/10.3844/sgamrsp.2021.134.194).

97. PARCEL, J I; MANEY, G A. *An elementary treatise on statically indeterminate stresses*. New York: John Wiley & Sons, 1944.

98. REDDY, J. N. An introduction to the finite element method. In: _____. *Finite Element Analysis for Engineering Design*. New York: Springer Berlin Heidelberg, 1988. p. 41–70. ISBN 9783642835353. doi: [10.1007/978-3-642-83535-3_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-83535-3_3).

99. HEIDEBRECHT, Arthur C.; SWIFT, R. David. Analysis of asymmetrical coupled shear walls. *Journal of the Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers (ASCE), New York, v. 97, n. 5, p. 1407–1422, maio 1971. ISSN 2690-3377. doi: [10.1061/jsdeag.0002901](https://doi.org/10.1061/jsdeag.0002901).

100. SMITH, B S; COULL, A. *Tall Building structures: analysis and design*. New York: John Wiley, 1991.

101. YOSHIDA, G K. *Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço*. Dissertação (Mestrado) — EESC, São Carlos, 1988. Disponível em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/717>.